PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE

D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

SECRÉTAIRE, **M. ALLIAUME**

Vol. III (nos 27 à 43)
1926

LOUVAIN
LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
UYSTPRUYST, éditeur
1927

ONT COLLABORÉ A CE VOLUME

M. A. Rome, professeur au Collège Sainte Gertrude de Nivelles (n° 27).

M. R. de Montessus de Ballore, directeur des études à l'Office national météorologique de France (n° 30).

M. É. Goedseels, professeur honoraire de l'Université de Louvain (n^{os} 32 et 42).

M. F. Moreau, astronome à l'Observatoire royal de Belgique (n^{os} 35 et 43).

M. A. Biot, ingénieur de la Société belge d'optique et d'instruments de précision (n° 37).

R. P. H. Dopp, S. J., professeur au Collège philosophique S. J. de Louvain (n° 38).

M. R. Van Ingelgem, Frère Augustin des Écoles chrétiennes, professeur à l'Institut S^{t} J.-B. de la Salle, Bruxelles (n° 40).

M. M. Alliaume, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (n^{os} 28, 29, 31, 33, 34, 36, 39 et 41).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/publications-du-laboratoire-dastronomie-et-de-geodesie_1926_3

TABLE DES ARTICLES

27. Le troisième livre des Commentaires sur l'Almageste par Théon et Hypatie, par M. *A. Rome*, p. 9.
28. Les cartes à canevas rectiligne, par M. *M. Alliaume*, p. 25.
29. La composition des systèmes optiques, par M. *M. Alliaume*, p. 37.
30. Calcul des Probabilités et Statistiques, nouveaux principes, par M. *R. de Montessus de Ballore*, résumé de leçons faites à l'université de Louvain, p. 43.
31. Les fondements analytiques de la Géodésie, par M. *M. Alliaume*, p. 73.
32. Théorie des instruments visuels, par M. *É. Goedseels*, p. 93.
33. Projet de table des factorielles n ! jusqu'à $n = 1000$, par M. *M. Alliaume*, p. 139.
34. Étude nomographique du quadrant de Robert l'Anglais, par M. *M. Alliaume*, p. 141.
35. Un gnomon arabe du XIV^e^ siècle, par M. *F. Moreau*, p. 151.
36. Le décentrage des systèmes optiques, par M. *M. Alliaume*, p. 157.
37. Sur la démonstration de la condition des sinus d'Abbe, par M. *A. Biot*, p. 165.
38. L'électricité atmosphérique (1^re^ partie), par le R. P. *H. Dopp*, p. 169.
39. Revue annuelle d'Astronomie, 1925, par M. *M. Alliaume*, p. 213.
40. Le problème des trois corps, par M. *R. Van Ingelgem*, p. 269.
41. Calcul d'une table des factorielles n ! jusqu'à $n = 1200$, par M. *M. Alliaume*, p. 281.
42. Supplément à l' « Exposition rigoureuse de la méthode des moindres carrés », par M. *É. Goedseels*, p. 283.
43. Sur la réduction des observations méridiennes, par M. *F. Moreau*, p. 287.

N° 27.

Le troisième Livre des Commentaires sur l'Almageste, par Théon et Hypatie

PAR

M A Rome [1]

INTRODUCTION

Écrit deux siècles après l'Almageste, le *Commentaire* (Ὑπόμνημα) *sur la syntaxe mathématique de Ptolémée,* par Théon d'Alexandrie est, après l'œuvre ptoléméenne elle-même, l'ouvrage astronomique « le plus important et le plus curieux qui nous reste des Grecs ». Ce jugement sur Théon est de Delambre, et nul n'est moins suspect que lui de partialité à l'égard du mathématicien alexandrin : il ne lui ménage point les critiques, et reproche à son ouvrage de n'être qu'une prolixe paraphrase du texte ptoléméen, de ne guère éclaircir les endroits difficiles et de nous renseigner trop peu sur les traditions et les pratiques de l'Observatoire; cette sévérité, outrée ou non, ne relève que davantage le prix de l'éloge que nous venons de transcrire, et Delambre lui-même se plaît à consacrer soixante-dix pages de son *Histoire de l'Astronomie ancienne* (tome I, 1817) à l'analyse détaillée du *Commentaire* théonien.

Théon professait au Muséum d'Alexandrie vers l'an 365.

Le *Commentaire* de Théon sur l'Almageste a eu la bonne fortune d'être imprimé dès l'an 1538, à Bâle, dans le même in-folio qui livrait aux savants la première édition du texte grec de l'Almageste : l'ouvrage de Ptolémée et le *Commentaire* de Théon y sont donnés en leur texte grec, sans nulle traduction et sans annotations [2]. En 1821, l'abbé Halma (1755-

---

[1] Société Scientifique de Bruxelles, *Volume jubilaire* (1926).

[2] L'Europe a d'abord connu l'Almageste par une version latine faite au XII^e^ siècle sur une traduction arabe, et publiée dès 1515, à Venise ; une version latine faite par Georges de Trébizonde sur un manuscrit grec a été imprimée en 1528, à Venise, et a eu de suite plusieurs rééditions. L'abbé Halma a publié en 1813-1816, à Paris, en deux in-4°, un texte grec de l'Almageste, accompagné d'une traduction française et suivi de notes de Delambre.

1828), soutenu par les encouragements de Delambre même, entreprit de publier, à nouveau, le texte du *Commentaire* de Théon, en l'accompagnant d'une traduction française et de notes; des difficultés financières furent une des causes qui arrêtèrent cette publication : elle se borna aux Livres I et II et à un Commentaire de Théon sur les Tables manuelles astronomiques de Ptolémée, jusqu'alors inédites, Commentaire qui parut en 1822 et 1825. — L'édition princeps de 1538 contient tout ce que l'on connaissait alors du texte grec de l'ouvrage de Théon. Des treize Livres qui composent ce Commentaire sur les treize Livres de l'Almageste, il manque, en cette édition, le Livre III, sur le mouvement du Soleil, qui y est remplacé par une restitution de ce Livre III, tentée vers 1350, par l'évêque grec Cabasilas, de Salonique; il y manque aussi le début et la fin du Livre V (suite de la théorie de la Lune) : ils sont remplacés par le fragment correspondant d'un Commentaire de Pappus sur le Livre de V l'Almageste ; enfin la partie finale du Livre X, tout le Livre XI et le début du Livre XII.

On ne peut trop féliciter M. l'abbé Rome d'avoir eu la main assez heureuse pour retrouver, au cours de recherches à la Bibliothèque des Médicis, à Florence, et la science assez sûre pour reconnaître aussitôt et pour identifier incontestablement le texte grec de ce Livre III du *Commentaire* de Théon.

B. Lefebvre, S. J.

§ 1. — Authenticité du 3e Livre de Théon

Éditer Théon d'Alexandrie, c'est travailler en terrain neuf : un in-folio (1) sorti de presse un peu trop tard pour avoir droit au titre d'incunable, et une édition luxueuse (2) commencée il y a un siècle, mais dont l'impres-

(1) Κλ. Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως βιβλ. ιγ. Θέωνος Ἀλεξανδρέως εἰς τὰ αὐτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. ια. *Claudii Ptolemaei Magnae constructionis, id est perfectae cœlestium motuum pertractationis lib XIII. Theonis Alexandrini in eosdem commentariorum lib. XI. Basileae Apud Joannem VValderum an MDXXXVIII*, pp. 327 + 425, in fol. — Cette première édition du *Commentaire* de Théon sur l'Almageste contient, sans traduction latine, le texte de l'Almageste (327 pp.) et le texte grec du *Commentaire* de Théon (425 pp). Des treize Livres de ce *Commentaire*, il manque le Livre III (et presque tout le Livre V). Pour y suppléer, on a inséré un travail de Nicolas Cavasilas sur e Livre III et des fragments de Pappus; manquent aussi la fin du Xe, tout le XIe et le commencement du XIIe. La Bibliothèque de l'Université de Gand et la Bibliothèque de la Ville d'Anvers possèdent chacune un exemplaire de cette très rare édition; il existe aussi, de cette édition de Bâle, un tirage sur parchemin, relié en deux volumes.

(2) *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier Livre de la Composition mathématique de Ptolémée. Traduit pour la première fois du grec en français sur les mss. de la Bibliothèque du Roi, par M l'abbé Halma.* Tome II, contenant la 1re partie des développements de la trigonométrie sphérique d'Hipparque et de Ptolémée. Paris 1821, in-4°. Tome II, contenant la seconde partie, etc. Paris, 1821, in-4°.

Les deux éditeurs sont tombés sur des manuscrits tellement proches parents (le ms de

sion a été arrêtée, sans doute faute d'argent, voilà toute la bibliographie du texte grec.

Ni l'un ni l'autre des éditeurs n'a trouvé le 3e Livre. Halma, le dernier de ces deux, rapporte sur son existence à Milan, des rumeurs inexactes et les rejette : si le 3e Livre existe, « comment se fait-il qu'il n'ait pas été publié? » (1). Et pourtant, quelques lignes plus loin, il met le doigt sur le bon manuscrit, et il le décrit fort exactement : il est parfaitement vrai que le 3e Livre se trouve à Florence, dans le codex du xe siècle, dont Halma donne le contenu sans oser y croire. D'autre part, il n'existe que là, et des trente manuscrits qui nous donneront les Commentaires de Théon et de Pappus sur l'Almageste, le *Med.* 28. 18 est le seul à conserver cet important fragment (2).

Ce manuscrit a passé au xve siècle entre les mains d'Ange Politien, qui lui a ajouté quelques notes marginales. Il a probablement été, de là, droit chez les Médicis, où il semble s'être trouvé dès avant 1534 (3). Il est de deux mains différentes : nous les désignerons par m^1 et m^2. Les deux copistes avaient à reproduire un vieil exemplaire de Théon et Pappus en plusieurs volumes; le premier tome était à peu près complet : il contenait Théon I à IV avec de nombreux mots effacés. m^1 s'en est chargé, et a reproduit jusqu'aux lacunes de son modèle, en leur conservant d'ordinaire leurs longueurs relatives. Le 2e tome contenait le reste de Théon : vu la longueur du premier livre, cela faisait deux volumes égaux. Malheureusement, ce 2e tome était tellement endommagé, que m^2, auquel on l'avait confié, n'en a pu tirer que le 6e Livre de Théon. Un troisième volume restait, d'un vieux Pappus : m^1 n'en a conservé que les Livres 5 et 6. Puis m^1 a corrigé toute la copie, et a mis en marge le résumé de chaque paragraphe. L'a-t-on reliée immédiatement en un volume? En tout cas, la numérotation des cahiers recommence aux changements d'écriture (4).

Le modèle était donc très vieux au xe siècle, et il était oncial, à preuve

---

Nuremberg, *cat. codd. astrol.*, vol. VII, p. 83, n° 42 et le *Paris*, gr. 2398) que Halma croyait posséder l'archétype de l'édition de Bâle. Nous n'arrivons pas à retrouver les papiers de Halma. Son dossier aux Archives Nationales fait supposer que son édition de Théon a été arrêtée faute d'argent. Il y a dans les Œuvres de Halma un volume dont la page de titre porte : *Commentaires de Th. Al. sur le 3e Livre de l'Almageste de Ptolémée;* en réalité, ce volume contient le commentaire des *Tables manuelles* de Ptolémée, édité en trois parties. Paris, 1822, 1823, 1825.

(1) Théon, éd. Halma, vol. I, p. VI.

(2) Il est aussi presque seul à contenir le 6e Livre de Pappus, qu'il sera très intéressant de placer à côté du 6e Livre de Théon : ce sera le seul passage d'une certaine longueur, où l'on pourra comparer entre eux les deux commentateurs de l'Almageste.

(3) Cfr *Index Bibliothecae Mediceae*, Florence, 1882, 30 pp., in-8°.

(4) La pagination date de 1890. C'est elle que nous citerons, à défaut d'édition.

les fautes de copie que l'on trouve dans le texte courant (1). On arriverait ainsi au VIII[e] siècle, comme ancienneté minimum d'un passage garanti par *Med.* 28. 18 seul.

Son modèle se rattache à un groupe de mss — appelons-le groupe 2 — dont dérivent, entre autres, *Marc.* 303, les parisiens 2390 et 2396 et le ms croisé *Vat.* 198. Lorsque *Med.* 28. 18 est d'accord avec le reste de sa famille, nous arrivons à un texte plus ancien déjà. Et lorsqu'il est d'accord avec un groupe indépendant (2), le groupe 1 (les deux éditions avec leurs modèles, et, moins étroitement apparentés, *Marc.* 310 et *Vat.* 198) nous nous trouvons devant le texte de l'archétype commun, c'est-à-dire que nous remontons au moins au VI[e] siècle.

Ajoutons que dans les textes mathématiques, la critique interne a un jeu plus aisé et plus sûr que dans les textes littéraires, et nous pouvons espérer obtenir un texte assez semblable à celui de Théon et de Pappus, au moins dans les parties garanties à la fois par les deux groupes.

Nous nous sommes arrêté, un peu longtemps peut-être, sur ces considérations de pure philologie, parce que leur conclusion nous est indispensable pour décider de l'authenticité du 3[e] Livre : — son garant est *Med.* 28. 18 : donc ce livre est attribué à Théon depuis le VIII[e] siècle au moins.

Les arguments internes en faveur de l'authenticité tendront à rattacher le 3[e] Livre aux livres garantis par les deux groupes à la fois. Si nous y trouvons des allusions à certains passages caractéristiques de notre texte, nous pourrons en déduire que ces passages faisaient partie du 3[e] Livre de Théon vers le VI[e] siècle : l'accumulation de ces arguments internes pourra nous donner une certitude morale.

De ces allusions, nous en avons, jusqu'à présent, retenu trois.

Au Livre IV; en commentant le chapitre 2 de l'Almageste, Théon veut démontrer que si la lune se meut en sens rétrograde sur un épicycle, sa vitesse apparente est minimum à l'apogée et maximum au périgée. Considérons le mouvement à partir de l'apogée. Il commence par nous expliquer que, par suite de ce mouvement rétrograde, il faudra, pour trouver la position apparente de la lune, retrancher au déplacement du centre de l'épicycle, un certain angle qu'il appelle la « différence à retrancher ».

---

(1) Les fautes dans les chiffres ou dans les titres ne prouvent rien : *Med.* 28.18 lui-même montre que les chiffres peuvent être en onciales dans un minuscule; m^2, plus ignorant que m^1, oublie à tout instant de translittérer.

(2) Le groupe 1 se compose des essais de restauration du texte — nous en comptons trois jusqu'à présent — exécutés au XIV[e] s. au moyen des mêmes manuscrits, donc dans la même région. M. Heiberg émet l'hypothèse, fort alléchante, que ces essais de restauration se sont faits dans l'entourage de l'archevêque de Salonique, Nicolas Cavasilas voy. *Almag.*, édit. Heiberg, vol. III, p. XLIII).

Or, dit Théon (1), « de toutes les différences à retrancher pour chaque position de la lune, celle qui correspond à l'apogée est la plus grande, comme nous l'avons démontré géométriquement au 3e Livre, à propos du soleil. Pour ne pas allonger notre commentaire par des répétitions [nous dirons donc que], lorsque la lune occupe cette position, son mouvement en sens direct sur l'écliptique passe par un minimum, parce que, de tous les déplacements de son épicycle en longitude dans le sens direct, c'est le déplacement à l'apogée qui répond à la plus grande de toutes les différences à retrancher ».

Il est assez curieux qu'il ne veuille pas répéter un raisonnement déjà fait, lui qui n'hésite pas à raconter au moins trois fois par le menu comment on fait une division, et qui développe *in extenso* le théorème de Ménélas, chaque fois qu'il en trouve l'occasion. Pourtant, nous comprendrions fort bien qu'il revienne ici sur la question de la vitesse maximum : la vitesse angulaire du soleil sur l'épicycle est égale à la vitesse angulaire de l'épicycle sur le déférent : c'est donc pour un cas particulier que la proposition a été démontrée.

A part cela, il est bien exact qu'au 3e Livre (2), on prouve que pour deux déplacements égaux et successifs à partir de l'apogée, l'« angle à retrancher » est plus grand, lorsque le déplacement est plus proche de l'apogée : d'où l'on déduit que la vitesse à l'apogée est minimum.

Théon fait donc, au 4e Livre, allusion à un détail particulier d'une démonstration du 3e. Cette allusion est caractéristique, parce que l'Almageste ne démontre pas, somme toute, que la vitesse est minimum à l'apogée dans l'hypothèse de l'épicycle (3) : son argument n'est pas concluant. Et Théon est fier d'avoir pu perfectionner l'œuvre du maître : il y revient encore, au 6e Livre (4), renvoyant de nouveau au même passage du 3e. Deux Livres, garantis eux-mêmes par l'ensemble des manuscrits, garantissent donc au moins un passage du 3e Livre.

Ajoutons que nous avons trouvé dans le 9e Livre ce renvoi à un certain procédé de division (procédé que nous exposerons plus loin (5)) : « Cette » division, dit Théon, s'effectue facilement, comme nous l'avons expliqué » aux 3e et 4e Livres à propos du soleil et de la lune. » Cette remarque ne l'empêche évidemment pas de recommencer toute l'explication du procédé : sinon, il ne serait plus Théon. Nous y gagnons de constater que

---

(1) Ed. de Bâle, p. 204, lire ἀπογειοτάτης au lieu de ἀπογειοτάτῳ. Nous citerons l'Almageste d'après l'édition de Heiberg ; sauf mention contraire, il s'agit toujours du vol. 1 ; Théon sera cité d'après l'édition de Bâle ou d'après *Med.* 28. 18 selon le cas. Nous y introduisons nos rectifications.

(2) *Med.* fol. 141V.

(3) Cfr *Alm.*, 217, 25

(4) Cfr Bâle, p. 296.

(5) Cfr Bâle, 9e Livre, p. 377, et ci-dessous, p. 13.

c'est bien à notre 3e Livre qu'il fait allusion. Naturellement, d'autres ont pu enseigner la même méthode. Pappus, en particulier, a pu le faire. De sorte que cet argument ne vaut pas celui que fournissent les deux allusions à un détail précis dans une démonstration ajoutée par Théon à l'Almageste. Mais il a sa valeur quand même.

L'étude du texte de Théon est à peine commencée : il est très possible qu'elle nous fournisse encore d'autres renseignements de ce genre.

Un autre argument interne consiste à examiner le contenu du 3e Livre lui-même, et à voir ce qu'il peut nous donner en fait de garanties d'authenticité. A ce point de vue nous n'avons rien trouvé de concluant, mais nous n'avons rien remarqué non plus qui nous force à rejeter l'attribution à Théon.

Jusqu'à présent, nous devons donc admettre que le 3e Livre que nous transmet *Med.* 28. 18 fait bien partie des *Commentaires* de Théon.

§ 2. — L'intervention d'Hypatie dans la rédaction du 3e Livre

A côté du nom de l'auteur, le manuscrit de Florence donne, pour les trois premiers Livres, le nom de l'éditeur. Dans les deux premiers, il dit expressément que l'édition est faite par Théon lui-même : τῆς παρ' αὐτοῦ γεγενημένης ἐκδόσεως. Pour le 1er Livre, il le répète dans le colophon. Le 3e Livre porte une mention analogue : ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῇ φιλοσόφῳ θυγατρί μου Ὑπατίᾳ.

Ce sous-titre signifie littéralement : « Édition revue par ma fille la philosophe Hypatie », ce qui indique un travail fait du vivant de Théon. Nous devons bien avouer que cette façon de s'exprimer a quelque chose d'insolite. Mais on peut mettre l'étrange expression sur le compte de l'orgueil paternel.

Jusqu'où va l'intervention de l'éditeur ? Il est certain que les Anciens ne respectaient pas le texte qu'ils éditaient : Théon lui-même dit avoir fait des ajoutes à Euclide ; et s'il a jugé à propos de mentionner le nom de sa fille dans le titre, c'est que l'édition est plutôt un remaniement : disons une collaboration, puisque l'auteur vivait encore.

L'attribution est-elle exacte ? De nouveau, elle n'est garantie que par *Med.* 28. 18. Mais le fait que *Paris* 2396 a conservé une mention d'éditeur, montre que le modèle du groupe II avait ces mentions. Nous remontons donc un peu plus haut que tout à l'heure, mais pas encore jusqu'à l'archétype.

Si le 3e Livre a été retouché, l'on comprend sa disparition de tous les manuscrits : il était, somme toute, moins authentique. Mais la réciproque de cette observation n'est pas nécessairement vraie.

Il faudra de nouveau faire appel à des arguments internes pour décider la question : ils porteront sur la langue, sur le style et sur le contenu.

Étudier la langue et le style du 3e Livre et les comparer à ceux des autres Livres, on ne peut y songer tant que le texte ne sera pas établi et ne sera pas muni d'un index. D'ailleurs, les différences de style seront probablement très petites : il s'agit d'un ouvrage d'astronomie élémentaire, et les retouches à déceler ont été faites par la fille et l'élève de l'auteur.

Et le contenu ? Il y a, somme toute, peu d'idées personnelles dans ce Commentaire destiné à l'enseignement. Aussi, ne devons-nous pas nous attendre à trouver une différence bien marquée entre les idées du Livre remanié et celles des Livres originaux : il est possible que l'éditeur ait ajouté de longs passages sans que ces passages tranchent bien nettement sur le reste. Nous devrons donc nous contenter d'enregistrer de légères nuances, si nous en trouvons.

D'un autre côté, nous n'avons rien relevé qui vienne détruire l'affirmation de *Med.* 28. 18, appuyé sans doute ici par tout le groupe 2. Jusqu'à fait nouveau, nous laisserons donc Hypatie en possession.

§ 3. — Le 3e Livre de Théon comme source historique

Donnons maintenant une idée de ce qu'on peut tirer du 3e Livre de Théon.

On peut d'abord y recueillir ses citations d'auteurs :

Ptolémée est cité constamment, cela va de soi. Il est cité d'une façon curieuse. Les explications commencent par le fragment de l'Almageste à commenter : on n'en dit que la première phrase, c'est une simple référence. Puis, ce texte est repris dans le commentaire lui-même : d'abord, avec de rares mots d'explication intercalés dans l'original ; ensuite, Théon quitte son Almageste graduellement, et finalement se trouve parler d'abondance : on croit entendre un professeur qui se met en train au moyen de son manuel.

Dans chaque paragraphe du Commentaire se trouve donc une zone de transition, où il est difficile de dire si l'on cite ou non l'Almageste, tant elle a de variantes intentionnelles.

Pourtant, il y a souvent moyen de faire le départ entre les variantes introduites exprès, et celles qui lui viennent du texte de Ptolémée reçu au ive siècle. M. Heiberg pense que ce texte reçu est représenté par les *Vat.* 180 et 184 (1). Jusqu'à présent, son hypothèse semble se maintenir.

Un travail plus intéressant sera de dresser le catalogue de la bibliothèque de Théon. Nous allons le dresser ici pour le 3e Livre. En l'établissant pour l'œuvre entière, on pourra se rendre compte de ce qui restait

(1) Cfr Ptolémée, éd. Heiberg, vol. III, p. CXXVI.

à la disposition d'un érudit d'Alexandrie à la fin du IVe siècle, peut-être après la disparition du Serapeum (1).

Dans le 3e Livre, Théon cite Euctémon, Méton, Calippe, Aristote, Eudème de Rhodes, Euclide et Hipparque. Mais a-t-il en mains tous les ouvrages dont il parle ?

Euctémon et Méton sont cités dans l'Almageste, 3e Livre, p. 203. 7. Dans le passage correspondant de son 3e Livre, Théon se contente de paraphraser Ptolémée : il ne lui ajoute rien qui montre une connaissance directe des œuvres d'Euctémon et de Meton. En commentant *Alm.* p. 207. 7, il paraît s'avancer plus loin (2) : « D'après les Athéniens de l'école de » Méton et d'Euctémon, l'année comprend $365^j 15' 47'' 22'''$ environ, ce » qu'Hipparque appelle $365^j \frac{1}{4} \frac{1}{76}$ ». Mais ce qu'il ajoute au texte de Ptolémée et d'Hipparque est une fraction sexagésimale ; cela seul suffit à prouver que ce n'est pas dans l'original, ou dans un fragment de l'original, qu'il a trouvé cette donnée : il réduit simplement en notation courante la notation en fractions élémentaires $\left(\frac{1}{4} \frac{1}{76}\right.$ reproduite par Ptolémée d'après Hipparque : il n'a nullement pour but d'attirer l'attention sur les $\frac{2'''}{19}$ de différence qui existent entre la donnée d'Hipparque et la sienne.

D'Aristote, aucun texte n'est cité : Théon essaie de greffer la théorie de Ptolémée sur celle du *Traité du Ciel ;* pour cela, il considère que la sphère de chaque planète a une épaisseur égale au diamètre de l'épicycle, ou au double de l'excentricité. Dans l'épaisseur de cette sphère, l'astre peut se déplacer d'après la loi de ses mouvements propres. C'est le système des « hypothèses des planètes » de Ptolémée.

Théon connaissait-il Eudème de Rhodes ? A propos d'*Alm.*, p. 197. 11, il donne des témoignages concernant la longueur de la période de Calippe : « Que la période est bien de 76 ans d'après Calippe, c'est men- » tionné entre autres par Eudème de Rhodes dans son ouvrage sur la » Géométrie » (3). D'après le peu qu'on sait des ouvrages d'Eudème,

(1) Il y a plus de citations dans le premier Livre que dans les autres : ne connaissant d'abord que l'édition Halma, nous avons eu une réelle désillusion, en ne trouvant pas, dans la suite, l'ample moisson d'extraits que le commencement promettait. Peut-on mettre cette diminution des citations en rapport avec la destruction du Serapeum ? Nous ne devons pas oublier que Théon peut faire des citations de seconde main. Cependant, lorsqu'il cite d'après Hipparque, il le dit. D'autre part, il est évident qu'il ne prétend pas tout citer. Recueillir des fragments qui se trouvent dans ses Commentaires, ne donnera pas la liste de tout ce qu'il a pu connaître en fait de mathématiciens.

(2) Nous donnons plus loin p. 9 et note (1) le texte grec de ce passage avec son contexte.

(3) ὅτι μὲν οὖν ἡ περίοδος κατ' αὐτὸν ἐτῶν ἐστιν ος καὶ Εὔδημος ὁ Ῥόδιος μέμνηται ἐν τοῖς περὶ γεωμετρίας αὐτῷ ἱστορουμένοις συντάγμασιν.

l'œuvre à laquelle il est fait allusion ici, s'intitule γεωμετρικὴ ἱστορία. Théon ne cite donc pas l'Histoire de la Géométrie sous son vrai titre. En outre, l'on s'attendrait plutôt à trouver pareil renseignement dans l' « Histoire de l'astronomie ». Nous n'avons pas le droit de supposer une erreur de copiste : d'abord *Med.* 28.18 est d'ordinaire fidèle, ensuite il y a peu de chances qu'il ait écrit γεωμετρία pour ἀστρονομία dans un commentaire sur l'*Almageste*. Une inexactitude dans une citation de Théon ne doit pas nous étonner : nous allons voir bientôt qu'il cite comme « démontrée » dans Euclide une proposition qui est un postulat, aussi bien dans l'édition originale que dans son propre arrangement de l'*Optique*. Mais, après tout, il n'est pas impossible qu'Eudème ait dit la longueur exacte de la période de Calippe, en parlant de Calippe dans son Histoire de la Géométrie ; et alors, si c'est là et pas dans l'Histoire de l'Astronomie que Théon cherche un détail astronomique, nous serons amenés à conclure que, de ces deux œuvres d'Eudème, il n'avait plus en mains que la première : l'Histoire de l'Astronomie était déjà perdue.

Calippe ne se trouvait plus dans les bibliothèques d'Alexandrie : c'est évident, puisque Théon le connaît par Eudème. Du reste, Ptolémée déjà le cite d'après Hipparque, et c'est également dans Hipparque que Théon a trouvé sur Calippe le détail qu'il ajoute à l'*Almageste* (1) :

« De même, dans son traité sur les mois et les jours intercalaires, » Hipparque constate que Calippe, s'appuyant sur la comparaison des » observations chaldéennes avec les siennes, estime la durée de l'année à » 365¼15′ jours, et le mois synodique ou lunaire à 29ᵈ 30′ jours. C'est pour » cela qu'il adopte une période de 76 ans, parce qu'en ce temps-là, » il y a 27 759 jours, et 940 lunaisons plus 29 jours, et qu'évidemment, » on a sensiblement une apocatastase des révolutions synodiques. D'autre » part, si l'on compte l'année de 12 mois synodiques, de façon qu'il y ait » une lunaison pour chaque 1/12 d'année, on aura dans les 76 ans, » 912 conjonctions, et il est clair qu'il restera dans la période 28 mois

(1) *Med.* fol. 135 R πάλιν, ἐν τῷ περὶ ἐμβολίμων μηνῶν τε καὶ ἡμερῶν, προειπὼν ὅτι ὁ μὲν Κάλλιππος συγκρίνας τὰς ἑαυτοῦ τηρήσεις πρὸς τὰς χαλδαϊκάς, συνάγει τὸν ἐνιαύσιον χρόνον (a) ἡμερῶν τξε ιε, τὸν δὲ <μη>νιαῖον (b) συνοδικὸν ἡ πανσεληνιακὸν ἡμερῶν κθ λ · διὸ καὶ τὴν περίοδον καταλαμβάνει ὁ τῶν οϛ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ τοσούτῳ χρόνῳ ἡμέραι μὲν συνάγονται μ,ζψνθ (c), σύνοδοι δὲ ϡμ καὶ ἡμέραι κθ, καὶ δηλαδὴ ἀποκατάστασις ἔγγιστα συνόδων ἀποτελεῖται · ἀλλὰ καὶ λογιζομένου τοῦ ἐνιαυσίου χρόνου μηνῶν συνοδικῶν ιβ, ὡς καθ' ἕκαστον δωδεκατημόριον μιᾶς συνόδου γινομένης, συνάγονται ἐν τοῖς οϛ ἔτεσιν συνόδοι <ϡιβ> (d), καὶ δῆλον ὅτι λοιποὶ καταλείπονται μῆνες συνοδικοὶ κη οὓς φασιν ἐμβολίμους, καὶ ἡμέραι κθ ἃς καὶ αὐτὰς φασιν ἐμβολίμους · καὶ ὁ Ἵππαρχος δὲ ἐν τῷ περὶ ἐμβολίμων μηνῶν τε καὶ ἡμερῶν συντάγματί φησιν (e, " ὅτι κατὰ μὲν τοὺς περὶ Μέτωνα (f καὶ Εὐκτήμονα „ ἀθηναίους " ὁ ἐνιαύσιος χρόνος „ ἡμερῶν ἐστιν τξε ιε μζ κβ ἔγγιστα, ὅν φησιν ἡμερῶν τξε δ'ος'. „ variantes de *Med.* 28. IX : (a) χρόνων (b) μη conj. de m¹ dans blanc de 3 lettres : il y a eu sans doute μει (c) μζψνθ (d) blanc de 2 lettres (e) ; cfr *Alm.* 207. 7-11 (f) μέτονα.

» synodiques, qu'on appelle intercalaires, et 28 jours auxquels on donne » le même nom. De son côté, Hipparque dit dans son traité sur les mois » et les jours intercalaires : D'après les athéniens »... (suit le texte dont nous avons parlé, p. 8).

Le δὲ, placé maladroitement après Ἵππαρχος, répond au μὲν de ὁ μὲν Κάλλιππος. Donc tout le texte que nous citons se rapporte à Calippe. Du reste, sauf peut-être le fait que Calippe a utilisé des observations babyloniennes, ce passage ne nous apprend rien de neuf.

Théon cite l'*Optique* sans nommer son auteur : tout le monde savait bien à quel livre il faisait allusion, lorsqu'il écrivait : « Ces objets vus sous » des angles différents semblent inégaux, ceux qui sont vus sous un plus » grand angle semblent plus grands : c'est démontré dans l'*Optique* », ὡς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς ἐδείχθη (1). La difficulté est que l'*Optique* d'Euclide ne démontre pas cette proposition : c'est un postulat, aussi bien dans l'édition originale que dans l'arrangement de Théon. On voit que Théon peut très bien connaître un ouvrage, et le citer inexactement. Quant à remplacer ἐδείχθη par un autre mot, par exemple ἐλέχθη, nous n'avons aucune raison de le faire, sauf celle de nous éviter une difficulté. Nous n'avons pas non plus le droit de nous débarrasser de la phrase, et de dire que c'est une glose.

Nous avons vu, à propos de Calippe, que l'on trouvait encore au IVe siècle des œuvres d'Hipparque aujourd'hui perdues, puisque Théon nous donne d'après le *Traité des mois et des jours intercalaires,* des détails qui ne sont pas dans l'*Almageste*.

Il devait avoir aussi l'ouvrage capital d'Hipparque sur la précession des équinoxes, car il explique comment on a procédé pour trouver la distance entre l'Épi de la Vierge et l'équinoxe d'automne. Ce passage ne constitue pas, toutefois, un argument irréfutable : en lisant bien l'*Almageste,* p. 199. 4. sqq. et vol. 2, p. 12. 21, sqq., on peut se rendre compte du procédé suivi (2). De même, rien ne nous prouve que Théon ait déroulé un Hipparque, pour nous dire comment on trouve l'instant de l'équinoxe, quand il ne tombe pas exactement à midi à l'endroit de l'observation.

Le nom d'Hipparque revient à tout moment, cela va sans dire. Mais les autres passages où il est mentionné, n'ajoutent rien à ce que dit l'*Almageste*. En certain endroit, au détour d'une longue période, on se demande si Théon veut dire que d'ordinaire Ptolémée ne répétait pas les passages d'Hipparque auxquels il n'avait rien à reprendre. Mais lorsqu'on arrive au bout, on s'aperçoit qu'on vient d'écouter un plaidoyer *pro domo* : Théon veut s'excuser de répéter un passage parfaitement clair de l'*Alma-*

(1) *Med.* fol. 138 R. Cfr. Euclide, *Optique*, éd. Heiberg, pp. 2 et 154.

(2) On ne peut évidemment pas objecter que Théon ne cite le titre du Livre qu'en raccourci, puisque le titre complet se trouve deux fois dans l'*Almageste*.

geste : c'est de la trigonométrie, et ses auditeurs ont besoin d'être guidés dès qu'elle intervient : il s'excuse auprès de ceux qui ont déjà compris.

§ 4. — Contenu du Livre III de Théon

Pour décrire le 3e Livre de Théon, il faudrait enfin donner une idée de son contenu, c'est-à-dire, puisqu'il ne fait que commenter étroitement son texte, en énumérer les *realia*, comme disent les pédagogues. Indiquons en quelques-uns.

1. Théon explique l'*Almageste*. Mais il essaie de le perfectionner, et il y arrive parfois. Nous avons déjà signalé (p. 4) comment il démontre, dans le cas d'un épicycle, qu'à l'apogée la vitesse est minimum : Ptolémée ne s'était pas donné la peine de trouver un argument concluant, ayant déjà fait la preuve de cette proposition pour le cas de l'excentrique.

L'*Almageste,* p. 230. 21, suppose que le Soleil peut se trouver en deux endroits différents de l'épicycle passant au même point du déférent. C'est impossible, dit Théon, vu le synchronisme des deux mouvements du Soleil. Et il rebâtit la preuve.

On voit qu'il s'agit de perfectionnements de détails. Que doit-il à Pappus dans tout cela ? La question se pose, mais elle n'est pas facile à résoudre.

2. Théon a travaillé à l'Observatoire d'Alexandrie, et il connaît bien le cercle de deux coudées monté équatorialement dans le portique carré (cfr. *Alm.*, 195. 5) ; il l'a vu s'éclairer sur les deux bords à la fois à l'instant de l'équinoxe (1). Seulement, cet appareil n'a jamais indiqué l'instant de l'équinoxe deux fois en un même jour (2). Hipparque a d'abord observé » le passage du Soleil à l'équinoxe, à l'aide de ses propres appareils, et » d'autre part, le cercle d'Alexandrie a été éclairé des deux côtés vers la » cinquième heure seulement » (3).

---

(1) *Med.* fol. 130R καθὼς καὶ τῷ Ἱππάρχῳ δοκεῖ καὶ ἡμῖν ἐκ παρατηρήσεος φανερὸν γέγονεν.

(2) Cfr *Almageste*, traduction Manitius, vol I, p. 135 et note 21, ainsi que *Alm.* 196.6. On peut objecter *Alm.* 197.22 sqq. Manitius explique les deux passages par un jeu de réfraction. Cela ne va pas sans difficultés. La solution de Théon s'applique bien à 196.6 ; il n'est pas impossible de l'adapter à 197.22 : il y a plusieurs cercles dans la palestre. Mais alors on doit donner à δίς le sens : à deux moments différents.

(3) *Med.* fol. 129V φανερὸν ποιεῖται ὅτι ... [a] καὶ ὅτι παρὰ τὰ ὄργανα καὶ αὐτὰς τὰς τηρήσεις δύναται γίγνεσθαι ἡ τοσαύτη διαφωνία, ἐκ τοῦ τὴν αὐτὴν ἰσημερίαν διαφόροις ὀργάνοις < τετηρημένην, τέταρτον > [b] μιᾶς ἡμέρας ἔγγιστα διαπεφωνηκέναι, τῷ τὸν μὲν Ἵππαρχον τῷ ἑαυτοῦ ὀργάνῳ τετερηκέναι γινομένην τὴν ἰσημερίαν, πρῶτον δὲ " ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κρίκον ἴσον ἑξ ἑκατέρου μέρους παρηυγάσθαι περὶ ἕῶραν. „ [c] variantes (a) nous omettons une ligne. (b) conj. dans un blanc de 16 lettres (c) ; cfr *Alm.* 196. 6.

3. Le raisonnement qui commence p. 217. 25 dans l'*Almageste*, est appelé par Théon « le 2e théorème » (1). On trouve dans les Commentaires une très grande quantité de passages où les renvois à l'*Almageste* sont faits d'après des numéros de théorèmes.

A première vue, l'on pourrait se demander si l'aspect extérieur de l'*Almageste* ne va pas être modifié par cette constatation ; devrons-nous nous le figurer divisé en théorèmes comme les Éléments ? Après avoir relevé, autant que c'est possible, tous les passages en question, nous pensons qu'il n'en est rien. D'abord, il est bien certain que l'*Almageste* de Ptolémée était divisé en chapitres : c'est ce que prouve le 6e Livre des Commentaires de Pappus : il permet de retrouver tous les chapitres du cinquième Livre tel qu'il était au IIIe siècle. Il y a bien quelques différences entre cette répartition et celle que nous donne l'édition Heiberg, mais le fait même que Ptolémée avait divisé son œuvre en chapitres est confirmé par Pappus. D'ailleurs, il est confirmé par Théon aussi, qui attribue clairement la division à Ptolémée (2). Sa numérotation des chapitres diffère également de la nôtre : ainsi, le chapitre 1 du 2e Livre, dont il parle dans le passage qui vient d'être reproduit, c'est le chapitre 3 de notre texte ; le chapitre 2 de nos éditions est un lemme dont la protase est le titre actuel, et le chapitre 1 de notre texte reçu est une introduction (3). Alors, nous devons au moins modifier la division en chapitres ? Nous ne le pensons pas. Tel que le texte de l'*Almageste* est établi, il peut en appeler à une tradition manuscrite au moins aussi ancienne que Pappus. Notre étude du texte de Théon et de Pappus nous donnera une idée de l'état de l'*Almageste* à une certaine époque. Elle fixera peut-être l'aspect d'une famille de manuscrits ; elle ne pourra pas imposer ses variantes (4).

Par conséquent, il est probable que Ptolémée n'avait pas disposé son œuvre par théorèmes, les manuscrits de l'Almageste ne portant pas de traces de cet arrangement (5).

D'autre part, en étudiant le 5e et le 6e Livre de Pappus, on y trouve la liste complète de tous les « théorèmes » des 5e et 6e Livres de l'*Almageste*, tant Pappus emploie cette division : en étudiant les six premiers Livres de Théon (6), nous trouvons le numéro d'un seul théorème de chacun

---

(1) Dans tout ce qui suit « théorème » veut en réalité dire « proposition » ; ainsi, le 5e « théorème » du 9e Livre est en fait un problème. Il y a des emplois analogues de ce mot dans Héron d'Alexandrie.

(2) Cfr Livre 2, Bâle, p. 81. ἐξῆς ἄρχεται τῆς ἀποδείξεως τοῦ ἀπαριθμηθέντος αὐτῷ πρώτου κεφαλαίου.

(3) P. 89. Ptolémée énumère les choses dont il va parler : la première est précisément celle dont il est question au « chapitre 3 ».

(4) Cfr Ptolémée, éd. Heiberg, vol. III, p. CXXXVI.

(5) Nous devons ce renseignement à M. Heiberg.

(6) Nous n'avons retrouvé que des fragments du 5e, et nous n'avons plus la moindre chance de retrouver le 11e.

des trois premiers Livres (1), nous ne trouvons rien dans le 4e et le 6e. Nous l'avons déjà dit, le 6e Livre est le seul morceau d'une certaine étendue, où l'on puisse comparer Pappus et Théon. Nous serions donc amenés à conclure, que la division serait du temps de Pappus, et que Théon est déjà en train de l'abandonner? Tout au moins devons-nous dire que Pappus tient compte de cette division et Théon presque pas? Mais alors, nous aboutissons à une autre conséquence : Si nous mettons de côté le 7e Livre, où ne se rencontre aucun des raisonnements que Théon et Pappus appellent des théorèmes, nous trouvons la liste complète des numéros dans le 9e et le 10e Livre, nous ne trouvons rien du tout dans le 8e et le 12e, et 2 théorèmes sur 6 dans le 13e.

Toute conclusion serait prématurée. Ce n'est qu'après avoir étudié la langue de Théon et celle de Pappus, qu'on pourra peut-être se prononcer. Rappelons d'ailleurs que le 9e Livre renvoie au procédé de division expliqué dans le 3e et le 4e Livre de Théon (2).

4. La remarque que nous venons de faire, nous amène au dernier échantillon que nous comptions donner du contenu du 3e Livre : une règle grecque de division, que les historiens des mathématiques nous semblent avoir passée sous silence, bien que le 4e Livre de Théon en parle (3).

Loria (4) traduit intégralement la description du procédé de division donné généralement d'après le 1er Livre comme étant le procédé courant. Celui du 3e Livre est plus facile, et c'est lui que Théon emploie dans la suite.

Soit à diviser 96 840 par 7 412° 10′ 44″ 51‴ 40ᴵᵛ (5).

J'écris le diviseur dans le système sexagésimal (6) : $2^{ss}\ 3^{s}\ 32°\ 10'\ 44'\ 51'''\ 40^{IV}$. Faute d'une notation appropriée, Théon écrit, en baissant toutes les unités de deux ordres : $2°\ 3'\ 32''\ 10'''\ 44^{IV}\ 51^{V}\ 40^{VI}$. Puis il fait la table de tous les multiples de ce diviseur, de 1 à 9 et des dizaines de 10 à 60. Cette table se fait sans doute sur l'abaque, par additions successives.

Ensuite il écrit 96 840 dans le système sexagésimal : $26^{ss}\ 54^{s}\ 0°$, ou, en baissant de nouveau toutes les unités de deux ordres, 26° 54′. Puisqu'il a baissé le dividende et le diviseur de la même façon, il trouvera le résultat

---

(1) En combinant d'autres citations, nous avons la division du 1er Livre en théorèmes jusqu'au « théorème de Ménélas », qui est le 14e.

(2) Cfr ci-dessus, p. 5 et note 15.

(3) Delambre l'a décrite dans son histoire de l'astronomie.

(4) *Scienze esatte nell' antica Grecia*, p. 781. Son texte, d'après Halma, donc d'après un ms du groupe 1, ne diffère en rien d'important du texte auquel nous aboutissons. Aucun des mss déjà collationnés ne donne de « disposition des calculs ». Nous comptons donc ne pas en donner, au 1er Livre.

(5) Nous prenons l'exemple du 4e Livre, Bâle, 217, puisque le 3e Livre n'est pas à la disposition du lecteur.

(6) Convenons que $\overset{S}{\vdots}$ signifie *soixante*, et $\overset{SS}{\vdots}$ *soixante soixantaines.*

sans transformation. Sinon, il aurait à appliquer les règles qui se trouvent un peu partout dans les traités grecs d'arithmétique, et qui remontent, paraît-il, à Diophante, du moins c'est Théon qui nous le dit (1).

Enfin il cherche dans sa table le multiple qui s'approche le plus, par défaut, de 26° 54′ : c'est 20° 35′ 21″ 47‴ 28^{iv} 36^{v} 40^{vi}. Donc le premier quotient partiel est 10°. De 26° 54 il retranche le produit partiel, et trouve le premier reste, 6° 18′ 38″ 12‴ 31^{iv} 23^{v} 20^{vi}, sur lequel il recommence. Les soustractions se font sans doute à l'abaque. Il notera sur sa tablette les restes partiels l'un en dessous de l'autre, sans s'inquiéter d'une disposition des calculs : les Anciens ne calculent pas par position. C'est de procédés de ce genre que viennent les lignes de chiffres que nous trouvons constamment dans nos manuscrits du 2^{d} groupe, les plus traditionnels. Ou bien même, laissant ses boules en position sur l'abaque, il peut ne rien écrire du tout, sauf les résultats partiels à la suite l'un de l'autre (2). Mais alors il s'enlève la faculté de vérifier.

Ce procédé donne très rapidement le résultat d'une division, qui est compliquée même pour nous. Il nous semble plus intéressant que l'autre, parce qu'on sent que c'est bien de cette façon que l'opération se faisait en pratique. Or, la façon pratique de calculer, ou comme on l'appelait, la *logistique*, est précisément la partie la moins connue des mathématiques grecques.

Nous arrêterons ici notre description du contenu : elle n'a pas la prétention d'être complète. Pour fournir des résultats sûrs, Théon doit d'abord être attaqué du côté philologique. Mais le labeur philologique terminé, il restera encore bien des trouvailles à faire pour ceux qui attaqueront la galerie par le côté mathématique (3).

---

(1) La connaissance de ces règles est indispensable pour effectuer un calcul sur des nombres écrits dans le système sexagésimal. Donc elles ne peuvent pas être de Diophante.

(2) N'oublions pas que notre premier quotient partiel, 10, s'écrit en grec au moyen d'un seul chiffre : ι, à côté duquel viendra le chiffre des unités, s'il y en a.

(3) Note au cours de l'impression. Il est inutile de faire remarquer au lecteur que c'est une espèce de chantier, qu'il vient de traverser : l'édition de Théon n'est qu'en préparation, le texte n'est établi que dans une petite partie, où la collation des manuscrits s'est trouvée plus vite finie. — L'on comprendra qu'il est impossible, avant quelque temps d'ici, de formuler des conclusions définitives.

Janvier 1925.

N° 28.

Les cartes à canevas rectiligne

par M. M. Alliaume (1)

1. Dans la préparation d'une carte, le mode de correspondance entre le géoïde et le plan de la carte est trop souvent adopté sans raison bien péremptoire, et trop souvent aux dépens de la simplicité. On se propose d'étudier, de la manière la plus générale, *le mode de représentation cartographique dans lequel l'ensemble des méridiens et l'ensemble des parallèles sont représentés par des familles de droites*. On y fait voir que la simplicité de construction des cartes de ce type ne les empêche pas de satisfaire, par un choix convenable des fonctions laissées arbitraires, aux exigences pratiques les plus étendues.

2. Dans une congruence de droites, une droite quelconque est définie par deux paramètres (u, v). Dans un plan, à toute droite (u, v) de la congruence correspond un point dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y). L'ensemble de ces points constitue une carte de la congruence, ou une carte de l'une quelconque des surfaces (s'il existe de pareilles surfaces) dont chacune est perpendiculaire en chacun de ses points à la droite de la congruence passant par ce point. Les équations

$$u = \textit{constante},$$
$$v = \textit{constante}$$

définissent deux familles à un paramètre de lignes de la carte, ou le *canevas* de la carte.

Pour que les lignes du canevas soient des droites, il faut et il suffit que leurs équations soient de la forme

$$U_1 x + U_2 y + U_3 = 0,$$
$$V_1 x + V_2 y + V_3 = 0,$$

où les (U_1, U_2, U_3) et les (V_1, V_2, V_3) sont respectivement des fonctions de u seul et de v seul. Les équations de correspondance de la congruence et de la carte sont alors de la forme

$$x = \frac{U_2 V_3 - U_3 V_2}{U_1 V_2 - U_2 V_1},$$
$$y = \frac{U_3 V_1 - U_1 V_3}{U_1 V_2 - U_2 V_1}.$$

En adoptant les notations habituelles

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,$$

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 20 de la première partie.

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

telles que

$$eg - f^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,$$

et en posant

$$\Delta = U_1V_2 - U_2V_1,$$

et

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & U'_1 \\ U_2 & V_2 & U'_2 \\ U_3 & V_3 & U'_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & V'_1 \\ U_2 & V_2 & V'_2 \\ U_3 & V_3 & V'_3 \end{vmatrix}$$

où les indices supérieurs définissent des dérivées premières, soit par rapport à u, soit par rapport à v, on obtient

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -V_2\frac{\Delta_u}{\Delta^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = U_2\frac{\Delta_v}{\Delta^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = V_1\frac{\Delta_u}{\Delta^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -U_1\frac{\Delta_v}{\Delta^2},$$

d'où

$$eg - f^2 = \frac{\Delta_u{}^2\,\Delta_v{}^2}{\Delta^6}$$

et cette expression est, par hypothèse, différente de zéro pour toutes les droites non singulières de la représentation de la congruence. Au point (u, v) de cette représentation plane, l'élément de surface $d\sigma$ correspondant aux variations infiniment petites (du, dv) est

$$d\sigma = \frac{\Delta_u\,\Delta_v}{\Delta^3}\,du\,dv.$$

3. Si la congruence (u, v) est l'ensemble des normales à la surface

$$\Phi(X, Y, Z) = 0,$$

et si les paramètres (u, v) désignent les coordonnées polaires de la normale correspondante, les équations paramétriques de cette surface exprimeront les coordonnées (X, Y, Z) par des fonctions de (u, v) satisfaisant à l'équation de la surface et aux égalités

$$\frac{\Phi'_X}{\cos u \cos v} = \frac{\Phi'_Y}{\sin u \cos v} = \frac{\Phi'_Z}{\sin v}.$$

En vue des applications cartographiques, nous pouvons nous borner

à l'hypothèse d'une surface algébrique, et admettre que ces trois équations ont pu être résolues :

$$X = X(u, v),$$
$$Y = Y(u, v),$$
$$Z = Z(u, v).$$

Outre que ces fonctions sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières, il est entendu que sont exclus de la représentation paramétrique de cette surface les points dont les coordonnées annuleraient simultanément les trois déterminants du second ordre tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

et dont la somme des carrés vaut

$$EG - F^2$$

moyennant les notations habituelles

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2.$$

Au point (u, v) de la surface, l'élément d'arc ds correspondant à la variation infiniment petite du, dans la direction dv/du, et l'élément de surface $d\Sigma$ correspondant aux variations infiniment petites (du, dv) sont respectivement

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$
$$d\Sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

et l'hypothèse ci-dessus équivaut à ce que ces deux expressions, nécessairement réelles, ne soient nulles, quel que soit dv/du, en aucun des points (u, v) du domaine considéré de la surface.

Dans la représentation cartographique à canevas rectiligne de cette surface, définie par les fonctions (U_1, U_2, U_3) et (V_1, V_2, V_3), l'échelle des longueurs au point (u, v) et dans la direction dv/du est

$$\text{éch.} = \frac{\sqrt{(U_1\,\Delta_v\,dv - V_1\,\Delta_u\,du)^2 + (U_2\,\Delta_v\,dv - V_2\,\Delta_u\,dv)^2}}{\Delta^2\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},$$

et l'échelle des aires α au point (u, v) est

$$\alpha = \frac{\Delta_u \Delta_v}{\Delta^3 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Les conditions pour que la carte soit conforme sont exprimées par les équations différentielles

$$\frac{V_1^2 + V_2^2}{E} \frac{\Delta_u}{\Delta_v} = -\frac{U_1 V_1 + U_2 V_2}{F} = \frac{U_1^2 + U_2^2}{G} \frac{\Delta_v}{\Delta_u},$$

et la condition pour qu'elle soit équivalente est que le rapport

$$\frac{\Delta_u \Delta_v}{\Delta^3 \sqrt{EG - F^2}}$$

soit indépendant de (u, v) : cette constante est alors l'échelle des aires en tout point de la carte.

La droite

$$Ax + By + C = 0$$

de la carte est l'image de la ligne de la surface représentée dont l'équation en coordonnées curvilignes (u, v) résulte de l'élimination de (x, y) entre les équations

$$\begin{aligned} A\,x + B\,y + C &= 0, \\ U_1 x + U_2 y + U_3 &= 0, \\ V_1 x + V_2 y + V_3 &= 0, \end{aligned}$$

à savoir

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Plus généralement, à la ligne quelconque

$$\varphi(x, y) = 0$$

de la carte correspond la ligne

$$\varphi\left(\frac{U_2 V_3 - U_3 V_2}{\Delta}, \frac{U_3 V_1 - U_1 V_3}{\Delta}\right) = 0$$

de la surface représentée.

4. Dans le cas particulier du géoïde ellipsoïdal de révolution, dont le rayon équatorial est a et l'excentricité ϵ, et par un choix convenable des axes XYZ (coordonnées équatoriales), les paramètres sont la longitude u et la latitude v, et les équations paramétriques de la surface sont

$$\begin{aligned} X &= a\,C \cos u \cos v, \\ Y &= a\,C \sin u \cos v, \\ Z &= a\,S \sin v, \end{aligned}$$

où

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 v}}, \qquad S = \frac{1 - \epsilon^2}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 v}}$$

et pour lesquelles

$$E = a^2 C^2 \cos^2 v, \qquad F = 0, \qquad G = a^2 C^4 S^2,$$

de sorte que

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2 C^3 S \cos v,$$

et les pôles sont des points singuliers de la représentation actuelle du géoïde.

Les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions (U_1, U_2, U_3) et (V_1, V_2, V_3) pour que la carte soit conforme sont

$$U_1 V_1 + U_2 V_2 = 0,$$

$$\frac{V_1^2 + V_2^2}{U_1^2 + U_2^2} \left(\frac{\Delta_u}{\Delta_v}\right)^2 - \frac{\cos^2 v \,(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2}{(1 - \epsilon^2)^2} = 0 ;$$

la condition en $(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3)$ pour que la carte soit équivalente est que

$$\frac{1}{a^2(1 - \epsilon^2)} \frac{\Delta_u \Delta_v}{\Delta^3} \frac{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2}{\cos v}$$

soit indépendant de u et de v : cette constante est l'échelle des aires α en tout point de la carte.

5. Le canevas rectiligne est, en outre, rectangulaire lorsque

$$U_2 = 0, \qquad V_1 = 0,$$

et on peut toujours poser

$$U_1 = 1, \qquad V_2 = 1.$$

Dans ce cas, les équations paramétriques de la carte sont

$$x = - U_3,$$
$$y = - V_3 ;$$

de plus,

$$\Delta = 1, \qquad e = U'^2_3, \qquad \sqrt{eg - f^2} = U'_3 V'_3,$$
$$\Delta_u = U'_3, \qquad f = 0, \qquad ds^2 = (u'_3 du)^2 + (V'_3 dv)^2,$$
$$\Delta_v = V'_3, \qquad g = V'^2_3, \qquad d\sigma = U'_3 V'_3 du\, dv.$$

Au point (u, v) de la carte, l'échelle des longueurs est

$$\text{éch.} = \frac{\sqrt{(U_3 du)^2 + (V'_3 dv)^2}}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}}$$

calculée dans la direction dv/du ; et l'échelle des aires α est

$$\alpha = \frac{U'_3 V'_3}{\sqrt{FG - F^2}}.$$

La ligne du géoïde figurée par la droite

$$Ax + By + C = 0$$

de la carte est celle qui a pour équation

$$AU_3 + BV_3 = C.$$

Les conditions d'orthomorphisme se réduisent à

$$U'_3(1 - \epsilon^2) = \pm V'_3 \cos v\,(1 - \epsilon^2 \sin^2 v),$$

et la condition d'équivalence s'écrit

$$U'_3.V'_3 \frac{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2}{\cos v} = \alpha a^2 (1 - \epsilon^2).$$

C'est ainsi qu'une carte conforme à canevas rectangulaire est définie par les fonctions

$$-x = U_3 = -a\mu\,(u - u_o),$$

$$-y = V_3 = -a\mu\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) - \frac{\epsilon}{2}\log\frac{1 + \epsilon \sin v}{1 - \epsilon \sin v}\right];$$

dans les expressions correspondantes de x et de y, on reconnaît la définition d'une carte de Mercator dont l'axe des y est l'image du méridien de longitude u_o, et dont l'échelle des longueurs est μ en tout point de l'axe des x, image de l'équateur.

De même, c'est ainsi que, moyennant les constantes α, $c\mu$, u_o et k, une carte équivalente à canevas rectangulaire est définie par les fonctions

$$x = -U_3 = ac\mu\,(u - u_o),$$

$$y = -V_3 = \frac{\alpha a}{c\mu}\theta + k,$$

dont on a abrégé l'écriture en posant

$$\frac{\theta}{1 - \epsilon^2} = \int_o^v \frac{\cos v\,dv}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin v}{1 - \epsilon^2 \sin^2 v} + \frac{1}{4\epsilon}\log\frac{1 + \epsilon \sin v}{1 - \epsilon \sin v}.$$

Cette carte équivalente à canevas rectangulaire n'est généralement envisagée que pour la représentation du géoïde entier ou d'une partie du géoïde à peu près symétrique par rapport à l'équateur, et de façon que l'axe des x soit l'image de l'équateur. Dans ce cas, $k = 0$. La constante u_o est la longitude du méridien figuré par l'axe des y. Si on se donne l'échelle des aires α, on peut encore disposer de la constante μ, par exemple de manière que la partie considérée du géoïde, censée limitée à deux méridiens et à deux parallèles également distants de l'équateur, soit représentée par une carte (rectangulaire) dont les deux dimensions se trouvent dans un rapport que l'on s'impose. — On préfère ordinairement renoncer à ce degré de liberté en astreignant la scalaire à être circulaire

en tout point de l'équateur, condition pour laquelle $\alpha = c^2\mu^2$. Ainsi, en faisant ($c\mu$ ne comptant que pour une constante) $c = 1$, on aura, pour ce cas particulier, les équations de correspondance habituelles

$$x = a\mu(u - u_o),$$
$$y = a\mu\theta.$$

Mais on peut parfaitement construire une carte équivalente à canevas rectangulaire de façon que son axe des x soit l'image d'un parallèle quelconque, en vue de la représentation avantageuse (en particulier par sa simplicité) d'une région quelconque du géoïde. Soient (u_o, v_o) les coordonnées du point milieu de cette région. Les fonctions demandées sont

$$U_3 = -aC\mu(u - u_o),$$
$$V_3 = -\frac{\alpha a}{C\mu}(\theta - \theta_o),$$

où θ_o est la valeur de la fonction θ pour $v = v_o$. Les échelles des longueurs le long du parallèle v et le long du méridien u sont respectivement

$$\frac{c\mu}{\cos v}\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2 v}, \quad \frac{\alpha\cos v}{c\mu}\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2 v}},$$

et si l'on veut que la scalaire soit circulaire à l'origine (u_o, v_o)

$$c\mu = \frac{\cos v_o\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2 v_o}};$$

enfin, pour que μ soit la racine carrée de l'échelle des aires, échelle commerciale de la carte, et échelle des longueurs le long de l'axe des x,

$$\mu^2 = \alpha, \quad c = \frac{\cos v_o}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2 v_o}},$$

et les équations de correspondance sont

$$x = a\mu C_o\cos v_o(u - u_o),$$
$$y = \frac{a\mu}{C_o\cos v_o}(\theta - \theta_o),$$

écrites au moyen de l'abréviation

$$C_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2 v_o}}.$$

6. Généralisant le canevas précédent, on va étudier les cartes sur lesquelles les parallèles terrestres sont représentés par des droites parallèles, et les méridiens par des droites passant par un point imposé. L'axe des x appartient à l'image de l'un des parallèles terrestres; l'axe des y est dirigé positivement vers le nord et passe par le point de concours des

images des méridiens : soient (0, β) les coordonnées de ce point; l'ordonnée β est plus grande que l'ordonnée y de tout point de la carte. On a

$$U_2 = 1, \qquad U_3 = -\beta, \qquad V_1 = 0, \qquad V_2 = 1$$

de façon que

$$x = \frac{V_3 + \beta}{U_1}, \qquad y = -V_3$$

et

$$\Delta = U_1, \qquad \Delta_u = U'_1(V_3 + \beta), \qquad \Delta_v = U_1 V'_3.$$

Le problème consiste dans la détermination des fonctions U_1 de u et V_3 de v.

Cette carte ne pourra pas être conforme. La condition pour qu'elle soit équivalente, avec α pour échelle des aires, est

$$\frac{U'_1 V'_3}{U_1^2}(V_3 + \beta) = \alpha a^2(1 - \epsilon^2)\frac{\cos v}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2},$$

satisfaite en même temps que le système

$$\frac{U'_1}{U_1^2} = -c\mu, \qquad \frac{d(V_3 + \beta)^2}{dv} = -\frac{2\alpha a^2(1 - \epsilon^2)}{c\mu} \cdot \frac{\cos v}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2}$$

écrit au moyen de la constante $c\mu$ essentiellement positive et mise provisoirement sous la forme d'un produit de deux facteurs indéterminés. Par intégration, on obtient

$$U_1 = \frac{1}{c\mu u + c'}, \qquad V_3 = -\beta + \sqrt{c'' - \frac{2\alpha a^2}{c\mu}\,\theta}$$

avec les constantes d'intégration c' et c'', et après choix du signe de façon que V_3 soit une fonction décroissante de θ, comme on l'a admis en définissant le sens positif de l'axe des y. Eu égard à ces fonctions, les équations de correspondance sont

$$x = (c\mu u + c')\sqrt{c'' - \frac{2\alpha a^2}{c\mu}\,\theta},$$

$$y = \beta - \sqrt{c'' - \frac{2\alpha a^2}{c\mu}\,\theta}.$$

Pour déterminer les constantes d'intégration c' et c'', appelons (u_0, v_0) les coordonnées géographiques du point représenté par l'origine des axes de la carte. L'axe des x représente le parallèle $v = v_0$, et l'axe des y le méridien $u = u_0$. Les équations de correspondance deviennent

$$x = c\mu(u - u_0)\sqrt{\beta^2 - \frac{2\alpha a^2}{c\mu}(\theta - \theta_0)},$$

$$y = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{2\alpha a^2}{c\mu}(\theta - \theta_0)}.$$

La discussion des seconds membres, eu égard à leur réalité, montre de quelle manière la valeur absolue de β doit être suffisamment grande pour la construction de la carte d'une région terrestre dont les latitudes extrêmes sont données. Dans la pratique, on prendra β positif (plus grand que la borne supérieure de l'intervalle auquel il ne peut pas appartenir) ou négatif (moindre que la borne inférieure de cet intervalle) suivant que le point (u_0, v_0) appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud.

L'échelle des aires α ayant été choisie, on dispose encore du paramètre $c\mu$ et de l'ordonnée β. Si l'on veut que la scalaire soit circulaire à l'origine de la carte, le calcul de l'échelle des longueurs en ce point montre qu'il en est ainsi lorsque

$$c^2\mu^2\beta^2 = \frac{\alpha a^2 \cos^2 v_0}{1 - \epsilon^2 \sin^2 v_0};$$

l'échelle des longueurs est alors égale à la racine carrée de l'échelle des aires le long de l'axe des x. Comme deuxième condition, pour que les points singuliers de la représentation cartographique ne soient pas différents des points singuliers de la représentation paramétrique du géoïde, on demandera que le point de concours des images des méridiens soit l'image de pôle. Si θ_1 est la valeur de la fonction θ pour $v = \frac{\pi}{2}$ ou $v = -\frac{\pi}{2}$,

$$\theta_1 = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \epsilon^2}{4\epsilon} \log \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)$$

(qui tend vers ± 1 quand ϵ tend vers zéro), cette condition est exprimée par l'égalité

$$c\mu\beta^2 = 2\alpha a^2(\theta_1 - \theta_0).$$

Les valeurs de $c\mu$ et de β qui satisfont à ces deux conditions sont

$$c\mu = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 v_0}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v_0)(\theta_1 - \theta_0)},$$

$$\beta = \frac{2a(\theta_1 - \theta_0)\sqrt{\alpha(1 - \epsilon^2 \sin^2 v_0)}}{\cos v_0},$$

avec choix du signe de β qui assure la convergence des images des méridiens vers le nord ou vers le sud suivant le signe de v_0 et pour la détermination correspondante de la valeur de θ_1.

Enfin, si, en vue de notations plus simples, nous désirons que μ représente la racine carrée de l'échelle des aires,

$$\mu^2 = \alpha,$$

$$c = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 v_0}{\mu(1 - \epsilon^2 \sin^2 v_0)(\theta_1 - \theta_0)},$$

$$\beta = \frac{2a\mu(\theta_1 - \theta_0)\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 v_0}}{\cos v_0}.$$

et les équations définitives de correspondance sont:

$$x = a\mu(u - u_o)C_o \cos v_o \sqrt{\frac{\theta_1 - \theta}{\theta_1 - \theta_o}},$$

$$y = \frac{2a\mu(\theta_1 - \theta_o)}{C_o \cos v_o} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\theta_1 - \theta}{\theta_1 - \theta_o}} \right\},$$

où

$$C_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 v_o}},$$

et où μ est l'échelle commerciale de la carte, racine carrée de l'échelle des aires, pour lesquelles les images des méridiens convergent vers l'image du pôle nord ou du pôle sud suivant que v_o est positif ou négatif, et où il faudra, respectivement dans l'un ou l'autre de ces deux cas, donner à θ_1 la valeur de la fonction θ pour $v = +\frac{\pi}{2}$ ou pour $v = -\frac{\pi}{2}$.

7. On voit que la fonction θ de v,

$$\theta = (1 - \epsilon^2) \int_o^v \frac{\cos v dv}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2} = \frac{1 - \epsilon}{2} \frac{\sin v}{1 - \epsilon^2 \sin^2 v} + \frac{1 - \epsilon^2}{4\epsilon} \log \frac{1 + \epsilon \sin v}{1 - \epsilon \sin v},$$

joue un rôle important dans la construction de plusieurs cartes intéressantes à canevas rectiligne. C'est pourquoi il serait désirable de disposer d'une table numérique de cette fonction, moyennant l'argument v, et calculée pour la valeur la plus plausible de ϵ. La construction d'une pareille table a été préparée par le développement de θ suivant les puissances croissantes de la quantité petite ϵ^2 :

$$\int_o^v \frac{\cos v dv}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 v)^2} = \sum_{i=o} (i + 1)\epsilon^{2i} \int_o^v \sin^{2i} v \cos v dv$$

$$= \sum_{i=o} \frac{i + 1}{2i + 1} \sin^{2i+1} v \, . \, \epsilon^{2i},$$

de sorte que

$$\theta = \sin v - \sin v \sum_{i=1} \sin^{2(i-1)} v \, . \, \frac{(2i^2 + i) - (2i^2 + i - 1) \sin^2 v}{4i^2 - 1} \epsilon^{2i},$$

ou bien, si l'on écrit

$$\theta = A_o + A_1\epsilon^2 + A_2\epsilon^4 + A_3\epsilon^6 + \cdots,$$

les coefficients des termes de ce développement sont

$$A_o = \sin v,$$

$$A_1 = -\sin v \frac{3 - 2 \sin^2 v}{3},$$

$$A_2 = -\sin^3 v \frac{10 - 9 \sin^2 v}{15},$$

$$A_3 = -\sin^5 v \frac{21 - 20 \sin^2 v}{35},$$

Une table de la fonction θ a été calculée provisoirement, à partir d'une table des sinus à cinq décimales, pour les latitudes v, considérées de dixième en dixième de grade, dont les parallèles rencontrent notre pays, à savoir de 55^g,0 à 57^g,2. La valeur adoptée pour ϵ^2 a été 0,00672267 fournie par l'aplatissement $e = 1/297$. A une correction $\Delta \sin v$ apportée à la valeur de sin v correspond une correction de la fonction θ donnée, à une approximation convenable, par

$$\Delta_1\theta = \left\{ 1 - \sum_{i=1} \frac{\sin^{2(i-1)} v}{4i^2 - 1} \left[(2i-1)(2i^2+1) - (2i^2+i-1)(2i+1)\sin^2 v \right] \epsilon^{2i} \right\} \Delta \sin v,$$

et à un accroissement 0,01 de l'inverse de l'aplatissement adopté e_o, comme dans le passage de 297 à 297,01, correspond la correction

$$\Delta_2\theta = 0{,}02(1-e_o)e_o^2 \sin v \sum_{i=1} i \sin^{2(i-1)} v \frac{(2i^2+i) - (2i^2+i-1)\sin^2 v}{4i^2-1} \epsilon_o^{2(i-1)},$$

où

$$\epsilon_o^2 = e_o(2 - e_o).$$

Cet essai a montré l'utilité de l'expression $\dfrac{d(\sin v - \theta)}{d \sin v}$ égale à l'excès de l'unité sur la valeur adoptée ci-dessus pour $\Delta_1\theta/\Delta \sin v$.

N° 29.

La composition des systèmes optiques

par M. M. Alliaume (1)

1. Par rapport à des axes de coordonnées (X, Y, Z) ou (x, y, z), un système optique stigmatique et orthoscopique fait correspondre à tout point (X, Y, Z) du milieu-objet le point (x, y, z) du milieu-image, par des relations de la forme

$$x = \frac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}},$$

$$y = \frac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}},$$

$$z = \frac{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}},$$

qui définissent une transformation homographique (2), pourvu que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. A un facteur non-nul près, ce déterminant Δ est égal au déterminant fonctionnel de la transformation : nous l'appellerons le déterminant fonctionnel réduit de la transformation (3).

Lorsque deux transformations homographiques sont définies par les tableaux de coefficients (écrits dans l'ordre où ils forment les déterminants fonctionnels réduits)

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{Vmatrix}$$

leur application successive équivaut à une transformation homographique unique dont les équations de correspondance s'obtiennent par l'élimina-

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 56 de la première partie.

(2) *La qualité optique dite fidélité d'aspect des images*, Ann. Soc. scient. de Bruxelles, t. 39 (1920), p. 232 de la première partie.

(3) On voit l'avantage qu'il y aurait à faire usage de coordonnées homogènes.

tion des coordonnées du point-image intermédiaire entre les équations de correspondance écrites au moyen des coefficients des tableaux ci-dessus. Les coefficients correspondants des équations de la transformation résultante s'écriront (dans le même ordre) de manière à constituer le tableau

$$\begin{Vmatrix} a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{12}+a_{31}a'_{13}+a_{41}a'_{14}, \ldots, \ldots, a_{14}a'_{11}+a_{24}a'_{12}+a_{34}a'_{13}+a_{44}a'_{14} \\ a_{11}a'_{21}+a_{21}a'_{22}+a_{31}a'_{23}+a_{41}a'_{24}, \ldots, \ldots, a_{14}a'_{21}+a_{24}a'_{22}+a_{34}a'_{33}+a_{44}a'_{24} \\ a_{11}a'_{31}+a_{21}a'_{32}+a_{31}a'_{33}+a_{41}a'_{34}, \ldots, \ldots, a_{14}a'_{31}+a_{24}a'_{32}+a_{34}a'_{33}+a_{44}a'_{34} \\ a_{11}a'_{41}+a_{21}a'_{42}+a_{31}a'_{43}+a_{41}a'_{44}, \ldots, \ldots, a_{14}a'_{41}+a_{24}a'_{42}+a_{34}a'_{43}+a_{44}a'_{44} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} \Sigma\, a_{i1}\, a'_{1i} & \Sigma\, a_{i2}\, a'_{1i} & \Sigma\, a_{i3}\, a'_{1i} & \Sigma\, a_{i4}\, a'_{1i} \\ \Sigma\, a_{i1}\, a'_{2i} & \Sigma\, a_{i2}\, a'_{2i} & \Sigma\, a_{i3}\, a'_{2i} & \Sigma\, a_{i4}\, a'_{2i} \\ \Sigma\, a_{i1}\, a'_{3i} & \Sigma\, a_{i2}\, a'_{3i} & \Sigma\, a_{i3}\, a'_{3i} & \Sigma\, a_{i4}\, a'_{3i} \\ \Sigma\, a_{i1}\, a'_{4i} & \Sigma\, a_{i2}\, a'_{4i} & \Sigma\, a_{i3}\, a'_{4i} & \Sigma\, a_{i4}\, a'_{4i} \end{Vmatrix}$$

dans chaque élément duquel l'indice de sommation i doit être fait égal à 1, 2, 3, 4, ou bien, en abrégé, le tableau

$$\left\| \sum_i a_{im}\, a'_{ni} \right\| \quad (m, n, i) = 1, 2, 3, 4.$$

On aperçoit la loi de formation des coefficients des équations de correspondance de la transformation résultante : en particulier, *le déterminant fonctionnel réduit de la transformation résultante est égal au produit des déterminants fonctionnels réduits des transformations composantes.*

2. Lorsque les surfaces de séparation des divers milieux qui constituent le système optique sont de révolution autour d'une même droite, le système est centré, et la transformation homographique est de révolution autour de l'axe du système. Lorsqu'on adopte cet axe pour axe de la coordonnée Z ou z, les formules générales de la transformation homographique se simplifient jusqu'à prendre la forme

$$x = \frac{kX}{pZ+q}, \qquad y = \frac{kY}{pZ+q}, \qquad z = \frac{p'Z+q'}{pZ+q},$$

avec la condition

$$k(pq' - p'q) \neq 0.$$

Les constantes de la transformation, rapports de quatre des quantités

$$k, p, p', q, q'$$

à la cinquième, peuvent s'exprimer au moyen de quatre grandeurs indépen-

dantes quelconques qui leur sont liées. Nous adoptons les caractéristiques

$$c,\ c',\ f,\ f'$$

définies de la façon suivante [1] :

1) c est la cote $-\dfrac{q}{p}$ du foyer antérieur, ou du plan focal en (X, Y, Z) ;

2) c' est la cote $\dfrac{p'}{p}$ du foyer postérieur, ou du plan focal en (x, y, z) ;

3) f est la focale antérieure du système, telle que $(c + f)$ est la cote $\dfrac{k - q}{p}$ du plan principal du milieu objet (X, Y, Z) ;

4) f' est la focale postérieure du système, telle que $(c' + f')$ est la cote $\dfrac{pq - p'q + kp'}{kp}$ du milieu-image (x, y, z).

Au moyen de ces quatre caractéristiques, les équations de correspondance sont

$$x = \frac{f\mathrm{X}}{\mathrm{Z} - c}, \qquad y = \frac{f\mathrm{Y}}{\mathrm{Z} - c}, \qquad z = \frac{c'\mathrm{Z} + ff' - cc'}{\mathrm{Z} - c},$$

avec la condition $ff' \neq 0$.

L'étude de la composition de deux systèmes donnés centrés sur le même axe consiste dans la résolution du problème suivant.

On donne les caractéristiques (c_1, c'_1, f_1, f'_1) et (c_2, c'_2, f_2, f'_2) de deux systèmes optiques centrés sur la même droite, en configuration et situation par rapport à un même système d'axes de coordonnées. On demande les caractéristiques (c, c', f, f') du système résultant.

Ce problème se résout par le rapprochement des deux tableaux :

$$\left\|\begin{array}{cccc} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_1 & f_1 f'_1 - c_1 c'_1 \\ 0 & 0 & 1 & -c_1 \end{array}\right\| \qquad \left\|\begin{array}{cccc} f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_2 & f_2 f'_2 - c_2 c'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_2 \end{array}\right\|$$

et l'association de leurs éléments suivant la règle exprimée ci-dessus. Cette association fournit le tableau résultant

$$\left\|\begin{array}{cccc} f_1 f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 f'_2 + c'_2 (c'_1 - c_2) & (f_1 f'_1 - c_1 c'_1) c'_2 - f_2 f'_2 - c_2 c'_2) c_1 \\ 0 & 0 & c'_1 - c_2 & f_1 f'_1 - c_1 (c'_1 - c_2) \end{array}\right\|.$$

---

[1] *Sur le grossissement des lunettes*, Ann. Soc. scient. Bruxelles, t. 39 (1920), p. 120 de la première partie.

Par identification avec le tableau

$$\begin{Vmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & ff' - cc' \\ 0 & 0 & 1 & -c \end{Vmatrix}$$

propre au système résultant, on obtient

$$f = \frac{f_1 f_2}{c'_1 - c_2}, \qquad f' = -\frac{f'_1 f'_2}{c'_1 - c_2},$$

$$c = c_1 - \frac{f_1 f'_1}{c'_1 - c_2}, \qquad c' = c'_2 + \frac{f_2 f'_2}{c'_1 - c_2},$$

résultat auquel on serait arrivé, bien entendu, mais moins systématiquement par l'élimination des coordonnées du point-image dans le premier système et jouant le rôle de point-objet dans le second système.

Les éléments caractéristiques résultants ci-dessus se prêtent à une interprétation géométrique et à une construction. — Notant F, F', P, P' les foyers et les points axiaux principaux d'un système centré, marquant d'indices 1 et 2 ces points dans l'un et dans l'autre des systèmes proposés, et les laissant sans indice dans le système résultant, on a

$$FP = \frac{F_1 P_1 \cdot F_2 P_2}{F_2 F'_1}, \qquad F' P' = -\frac{F'_1 P'_1 \cdot F'_2 P'_2}{F_2 F'_1},$$

$$P_1 P = -\frac{F_1 P_1 \cdot F'_1 P'_1}{F_2 F'_1}, \qquad P'_2 P' = \frac{F_2 P_2 \cdot F'_2 P'_2}{F_2 F'_1}.$$

Ce sont les rapports à un même segment des produits des quatre focales prises deux à deux ; et la construction peut se faire au moyen des quatre angles que font entre elles deux droites dirigées : l'une portant, à partir de leur intersection, les segments $f_1 = F_1 P_1$ et $f'_2 = F'_2 P'_2$; l'autre portant, à partir du même point, les segments $f'_1 = F'_1 P'_1$ et $f_2 = F_2 P_2$.

3. Pour généraliser le problème de la composition des systèmes optiques (centrés), on donnera les caractéristiques

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f'_1 & c_1 & c'_1 \\ f_2 & f'_2 & c_2 & c'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f'_n & c_n & c'_n \end{array}$$

de n systèmes optiques centrés sur le même axe, et on cherchera de proche en proche les caractéristiques du système formé par les deux premiers, puis du système formé par les trois premiers, et ainsi de suite

jusqu'au système total proposé. — Ainsi, pour le système résultant de trois systèmes donnés :

$$f_{123} = \frac{f_1 f_2 f_3}{(c'_1 - c_2)(c'_2 - c_3) + f_2 f'_2},$$

$$f'_{123} = \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{(c'_1 - c_2)(c'_2 - c_3) + f_2 f'_2},$$

$$c_{123} = c_1 - \frac{f_1 f'_1 (c'_2 - c_3)}{(c'_1 - c_2)(c'_2 - c_3) + f_2 f'_2},$$

$$c'_{123} = c'_3 + \frac{f_3 f'_3 (c'_1 - c_2)}{(c'_1 - c_2)(c'_2 - c_3) + f_2 f'_2}.$$

Pour passer des caractéristiques

$$f_{1\,2\,3\,\ldots\,i}, \qquad f'_{1\,2\,3\,\ldots\,i}, \qquad c_{1\,2\,3\,\ldots\,i}, \qquad c'_{1\,2\,3\,\ldots\,i}$$

du système formé par les i premiers systèmes proposés, aux caractéristiques

$$f_{1\,2\,3\,\ldots\,(i+1)}, \qquad f'_{1\,2\,3\,\ldots\,(i+1)}, \qquad c_{1\,2\,3\,\ldots\,(i+1)}, \qquad c'_{1\,2\,3\,\ldots\,(i+1)},$$

du système formé par les $(i+1)$ premiers, il suffit de remplacer, dans les formules acquises par hypothèse, l'indice i par l'indice double $i\,(i+1)$, et de substituer, à chaque caractéristique munie d'un indice double, son expression telle qu'elle résulte de l'étude des systèmes formés de deux systèmes donnés [1]. En particulier

$$f_{1234} = \frac{f_1 f_2 f_3 f_4}{(c'_1 - c_2)(c'_2 - c_3)(c'_3 - c_4) + (c'_1 - c_2) f_3 f'_3 + (c'_3 - c_4) f_2 f'_2},$$

$$f'_{1234} = -\frac{f'_1 f'_2 f'_3 f'_4}{(c'_1 - c_2)(c'_2 - c_3)(c'_3 - c_4) + (c'_1 - c_2) f_3 f'_3 + (c'_3 - c_4) f_2 f'_2}.$$

Les résultats ci-dessus suggèrent la proposition suivante : *Le rapport des focales d'un système centré résultant est égal, en valeur absolue, au rapport des produits des focales de même nom des systèmes composants ; et le signe de ce rapport est + ou — suivant que le nombre des systèmes composants est impair ou pair.*

---

(1) Il peut être avantageux de remplacer plutôt chaque indice 1 par l'indice 12 et d'ajouter une unité à tous les autres indices. C'est ce qui arrive pour le calcul des c'. Par exemple, on écrit

$$c'_{123} = c'_3 + \frac{f_3 f'_3}{c'_{12} - c_3}$$

plutôt que

$$c'_{123} = c'_{23} + \frac{f_{23} f'_{23}}{c'_1 - c_{23}}.$$

Cette proposition se vérifie pour un système double :

$$\frac{f_{1\,2}}{f'_{1\,2}} = -\frac{f_1\,f_2}{f'_1\,f'_2}.$$

De plus, vraie pour i systèmes composants, elle est vraie pour $(i+1)$; car si, par hypothèse,

$$\frac{f_{1\,2\,3\,\ldots\,i}}{f'_{1\,2\,3\,\ldots\,i}} = (-1)^{i-1}\,\frac{f_1}{f'_1}\frac{f_2}{f'_2}\frac{f_3}{f'_3}\cdots\frac{f_i}{f'_i},$$

on a :

$$\frac{f_{1\,2\,3\,\ldots\,(i+1)}}{f'_{1\,2\,3\,\ldots\,(i+1)}} = (-1)^{i-1}\,\frac{f_1\,f_2\,\cdots\,f_{i\,(i+1)}}{f'_1\,f'_2\cdots f'_{i\,(i+1)}} = (-1)^{i}\,\frac{f_1\,f_2\,\cdots\,f_i\,f_{i+1}}{f'_1\,f'_2\cdots f'_i\,f'_{i+1}}.$$

Enfin, si on se rappelle que l'intervalle d'un système optique centré est le segment de son axe qui doit être différent de zéro pour que les foyers existent à distance finie, de sorte que l'intervalle du système double est $(c'_1 - c_2)$, quantité nulle dans un système afocal, on voit que les conditions pour qu'un système triple, un système quadruple, ... soient afocaux, sont respectivement :

$$(c'_1 - c_2)\,(c'_2 - c_3) + f_2\,f'_2 = 0$$

$$(c'_1 - c_2)\,(c'_2 - c_3)\,(c'_3 - c_4) + (c'_1 - c_2)\,f_3\,f'_3 + (c'_3 - c_4)\,f_2\,f'_2 = 0$$

et ainsi de suite.

Calcul des Probabilités et Statistiques
Nouveaux principes

par M. R. de Montessus de Ballore (1)

Résumé de leçons faites à l'Université de Louvain.

I. — La Formule fondamentale

1. Si les probabilités respectives de deux événements contradictoires E, E′ sont p et q $(p+q=1)$, la formule

$$(1) \qquad y = T_{mp-x} = \frac{m\,!}{(mp-x)\,!\,(mq+x)\,!}\, p^{mp-x} q^{mq+x}$$

fait connaître la *probabilité* que, sur un nombre de m épreuves, l'un des événements arrivera $mp-x$ fois, et que l'autre arrivera $mq+x$ fois.

Par exemple, si $m=180$, $p=0{,}1$, $q=0{,}9$, les valeurs de T_{mp-x} pour $x=0$, -1, -2, ... $x=1$, $x=2$, ... sont (2) celles du Tableau 1.

Cas particulier. Si les événements sont également probables, si $p=q=0{,}5$ et pour un nombre $2m$ d'épreuves :

$$(2) \qquad y = T_{m-x} = \frac{(2m)\,!}{(m-x)\,!\,(m+x)\,!}\, 0{,}5^{2m}$$

2. La formule (1) ne se prête pas aux transformations analytiques : nous allons en donner une représentation *approchée*.

Nous nous baserons sur la formule *approchée*

$$n\,! = M_n \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}, \quad M_n = 1.$$

---

(1) Société Scientifique de Bruxelles, *Volume jubilaire* (1926).

(2) Le Tableau I, et les Tableaux analogues, ont été calculés, à la demande de M. de Montessus de Ballore, par M. F. J. Duarte, ingénieur civil, qui a, tout d'abord, dressé à cette intention la table à 12 décimales de log n !, pour toutes les valeurs de n de 1 à 1000 (Mém. n° 10 de l'Office National Météor. de France, Chiron, à Paris, 1925).

On a ainsi *approximativement*

$$y = \frac{M_m \sqrt{2\pi}\, e^{-m}\, m^{m+0,5}}{D}\, p^{mp-x} q^{mq+x},$$

où

$$D = M_{mp}\ x\sqrt{2\pi e}\ ^{mp+x}(mp-x)^{mp-x+0,5} M_{mq+x}\sqrt{2\pi}\, e^{-mq-x}(mq+x)^{mq+x+0,5}$$

ou bien

$$(M_m = M_{mp-x} = M_{mq+x} = 1)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{m^{m+0,5}}{\left(1-\frac{x}{mp}\right)^{mp-x+0,5} \times \left(1+\frac{x}{mq}\right)^{mq+x+0,5} \times m^{mp-x+0,5} \times m^{mq+x+0,5}} \times$$

$$\times \frac{p^{mp-x}}{p^{mp-x+0,5}} \times \frac{q^{mq+x}}{q^{mq+x+0,5}}$$

$$(2) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \times \frac{1}{\left(1-\frac{x}{mp}\right)^{mp-x+0,5} \times \left(1+\frac{x}{mq}\right)^{mq+x+0,5}}.$$

On sait que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad |x| < 1$$

Si 'on pose pour un instant

$$H = \left(1-\frac{x}{mp}\right)^{mp-x+0,5} \times \left(1+\frac{x}{mq}\right)^{mq+x+0,5},$$

on peut donc écrire

$$\log H = \left(mp - x + \frac{1}{2}\right)\left[-\frac{x}{mp} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(mp)^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{(mp)^3} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{(mp)^4} - \ldots\right]$$

$$+ \left(mq + x + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{x}{mq} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(mq)^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{(mq)^3} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{(mq)^4} + \ldots\right]$$

En tenant compte de $p + q = 1$, il vient, toutes réductions faites,

$$(3) \quad \log y = -\log\sqrt{2\pi mpq} - \frac{(p-q)x}{2mpq} - \left(\frac{1}{2mpq} - \frac{p^2+q^2}{4m^2p^2q^2}\right)x^2 +$$

$$+ \left(\frac{p-q}{6m^2p^2q^2} - \frac{p^3-q^3}{6m^3p^3q^3}\right)x^3 - \left(\frac{p^3+q^3}{12m^3p^3q^3} - \frac{p^4+q^4}{8m^4p^4q^4}\right)x^4 +$$

$$+ \left(\frac{p^4-q^4}{20m^4p^4q^4} - \frac{p^5-q^5}{10m^5p^5q^5}\right)x^5 - \ldots.$$

TABLEAU I

$$y = \frac{180\,!}{(18-x)\,!\,(162+x)\,!}\,0{,}1^{18-x} \times 0{,}9^{162+x}$$

Valeurs de x	Valeurs de y	Valeurs de x	Valeurs de y
— 11	0,003245	+ 1	0,098050
— 10	0,005571	+ 2	0,091473
— 9	0,009177	+ 3	0,079831
— 8	0,014480	+ 4	0,064923
— 7	0,021860	+ 5	0,048931
— 6	0,031530	+ 6	0,034113
— 5	0,043378	+ 7	0,021800
— 4	0 056830	+ 8	0,012695
— 3	0,070770	+ 9	0.006682
— 2	0,083597	+ 10	0,003147
— 1	0,093463	+ 11	0,001310
0	0,098655		

3. La formule (3) est fréquemment employée sous la forme réduite [1]

$$(4) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{x^2}{2mpq}}.$$

On rencontre aussi la forme réduite

$$(5) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{p-q}{2mpq}x - \frac{x^2}{2mpq} + \frac{p-q}{6m^2p^2q^2}x^3}$$

qui se réduit à (4) quand $p = q = 0{,}5$.

Nous allons étudier la formule (5), non pas analytiquement (le point de vue analytique sera exposé dans un autre *Mémoire*) mais dans ses relations d'ordre numérique avec la formule (1).

4. Nous observons immédiatement ce qui suit, et cela est *fondamental*. On écrit couramment, quand $p = 0{,}5$ (form. 4) :

$$y = Ae^{-h^2x^2}.$$

On *définit* même parfois les courbes de probabilité (1) par cette formule.

Or, les courbes de probabilité sont définies par la formule (1) et ne le sont qu'*approximativement* par les formules (4) et (5).

La formule (4) — probabilité 0,5 — ou bien $y = Ae^{-h^2x^2}$, conduit à écrire en effet

$$\log y = \log A - h^2x^2 \log e$$

ce qui suppose que les différences secondes de log y sont *constantes*.

---

[1] La formule (4) a été étudiée dans l'*Introduction* des Tables de Log *n !*, *loc. cit.*

Or, CES DIFFÉRENCES SECONDES NE SONT PAS CONSTANTES, le tableau qui suit est très suggestif à cet égard.

TABLEAU II (1)

$$y = \frac{1000\,!}{(500-x)\,!\,(500+x)\,!}\,\frac{1}{2^{1000}} \qquad (p = 0{,}5)$$

VALEURS DE y	LOG y	d_1	d_2	d_3
0	$\bar{2}$,4018 3148 7883	8 6772 1531	17 3544 9991	2 0783
1	$\bar{2}$,4009 6376 6352	26 0317 1522	17 3547 0774	3 4642
2	$\bar{2}$,3983 6059 4830	43 3864 2296	17 3550 5416	4 8501
3	$\bar{2}$,3940 2195 2534	60 7414 7712	17 3555 3917	6 2360
. . . . .				
44	$\bar{4}$,7197 5313 6458	774 3165 9613	17 4958 6434	640996
45	$\bar{4}$,6423 2147 6845	791 8124 6047	17 5022 7430	
46	$\bar{4}$,5631 4023 0798	809 3147 3477		
47	$\bar{4}$,4822 0875 7321			

Le Tableau III montre semblablement que la formule (5) ne représente qu'approximativement la fonction (1), CAR LES DIFFÉRENCES TROISIÈMES DE CETTE FONCTION NE SONT PAS CONSTANTES.

TABLEAU III (2)

$$y = \frac{1000\,!}{(250-x)\,!\,(750+x)\,!}\,0{,}25^{250-x}\times 0{,}75^{750+x} \qquad (p = 0{,}25)$$

Valeurs de x	*log* y	d_1	d_2	d_3
0	$\bar{2}$,4642 5259	5 7867	23 1856	63.
1	$\bar{2}$,4636 7392	28 9723	23 2482	63.
2	2,4607 7669	52 2205	23 3109	63.
3	$\bar{2}$,4555 5464	75 5314	23 3745	63.
4	$\bar{2}$,4480 0150	98 9059	23 4385	64.
. . . . .				
37	$\bar{4}$.8460 1942	884 3971	25 7688	88.
38	$\bar{4}$,7549 9407	910 2535	25 8564	89.
39	$\bar{4}$,6613 7417	936 1990	25 9455	89.
40	$\bar{4}$,5651 5080	962 2337	26 0347	89.
. . . . .				
0	$\bar{2}$,4642 5259	17 3370	23 0629	61.
—1	$\bar{2}$,4584 1889	40 3999	23 0018	60.
—2	2,4625 7890	63 4017	22 9421	60.
—3	$\bar{2}$,4521 3873	86 3438	22 8822	59.
. . . . .				

(1) ANNALES SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, tome XLIV, 1re partie, 1935, p. 176.

(2) MÉM. OFFICE NAT. MÉTÉOR. DE FRANCE, *loc. cit.* Le dernier chiffre de d_3, incertain, a été remplacé par un *point*.

II. Écarts et fréquences

5. Plaçons-nous dans le cas de $p = 0{,}5$ et calculons les valeurs de $y = \frac{60!}{(30-x)!\,(30+x)!}\,0{,}5^{60}$, puis les valeurs de $100y$, enfin arrondissons $100y$ à l'unité.

TABLEAU IV

$$y = \frac{60!}{(30-x)!\,(30+x)!}\,0{,}5^{60}$$

Valeurs de x	Valeurs de y	$100y$	
0	0,102 578	10,2578	
1 ou — 1	0,099 269	9,9269	9,9269
2 ou — 2	0,089 756	8,9756	8,9756
3 ou — 3	0,076 332	7,6332	7,6332
4 ou — 4	0,060 717	6,0717	6,0717
5 ou — 5	0,045 029	4,5029	4,5029
6 ou — 6	0,031 271	3,1271	3,1271
7 ou — 7	0,020 284	2,0284	2,0284
8 ou — 8	0,012 277	1,2277	1,2277
9 ou — 9	0,006 925	0,6925	0,6925
10 ou — 10	0,003 636	0,3636	0,3636

$100y$ arrondi a l'unité		Nb. de fréq. d'écart	0	10
10				
10	10	»	+ 1 ou — 1	10
9	9	»	+ 2 ou — 2	9
8	8	»	+ 3 ou — 3	8
6	6	»	+ 4 ou — 4	6
5	5	»	+ 5 ou — 5	5
3	3	»	+ 6 ou — 6	3
2	2	»	+ 7 ou — 7	2
1	1	»	+ 8 ou — 8	1
1	1	»	+ 9 ou — 9	1
0	0	»	+ 10 ou — 10	0

Il est d'usage d'employer la terminologie que voici :

y *est une courbe de probabilité.* 100y *est une courbe de fréquence.*

Pour un total de 100 *fréquences,* la formule (6) répartit ces 100 fréquences en 19 groupes, à savoir :

1	groupe de	1	fréquence,	écart zéro,
1	»	10	fréquences,	» + 1,
1	»	10	»	» — 1,
1	»	9	»	» + 2,
1	»	9	»	» — 2,

.....

L'étude *attentive* du Tableau IV précise parfaitement les notions d'« écart » et de « fréquence ». Nous considérons aussi le Tableau analogue relatif à $m = 100$:

TABLEAU V

$$y = \frac{100\,!}{(50-x)\,!\,(50+x)\,!}\,0{,}5^{100}$$

Valeur de x	Valeur de y	Ecarts	Nombre de fréquences
0	0,079 589	0	8 écrit pour 7,9589
1 ou — 1	0,070 028	± 1	8 » 7,8028
2 ou — 2	0,073 527	± 2	7 » 7,3527
3 ou — 3	0,066 591	± 3	7 » 6,6591
4 ou — 4	0,057 958	± 4	6 » 5,7958
5 ou — 5	0,048 474	± 5	5 » 4,8474
6 ou — 6	0,038 953	± 6	4 » 3,8953
7 ou — 7	0,030 069	± 7	3 » 3,0069
8 ou — 8	0,022 292	± 8	2 » 2,2292
9 ou — 9	0,015 869	± 9	2 » 1,5869
10 ou — 10	0,010 844	± 10	1 » 1,0844
11 ou — 11	0,007 111	± 11	1 » 0,7111
12 ou — 12	0,004 474	± 12	0 » 0,4474
13 ou — 13	0,002 698		
14 ou — 14	0,001 560		
15 ou — 15	0,000 864		
16 ou — 16	0,000 458		
17 ou — 17	0,000 232		
18 ou — 18	0,000 113		
19 ou — 19	0,000 052		
20 ou — 20	0,000 023		
21 ou — 21	0,000 010		

Dans ce tableau, 100 fréquences sont réparties en 23 groupes, les groupes qui ont pour écart 0, ± 1, ± 2, ..., ± 11.

6. Ainsi, nous donnons aux valeurs 0, ± 1, + 2, + 3, ... de x le nom d'*écarts,* et aux nombres y correspondants, *arrondis à l'unité,* le nom de

fréquences. Quand la probabilité est 0,5, on dit « erreurs » au lieu de « fréquences ».

Nous observons que le nombre de groupes de fréquences, 19 groupes dans le premier cas, 23 groupes dans le second cas, est fonction du nombre m qui figure dans la formule (1).

Nous venons de le montrer pour $p = 0{,}5$; cela est vrai quel que soit p.

Dans tout tableau de fréquences dérivé d'une loi de probabilité (1)

$$(7) \qquad Ay = A \frac{m!}{(mp - x)!\,(mp + x)!}\, p^{mp-x} q^{mq+x}$$

figurent 3 constantes fondamentales :

La constante A indique, à peu près, mais pas tout à fait exactement, comme nous allons le voir, le nombre de fréquences.

Plus importante est la constante m : le nombre de groupes de fréquences dépend de m. Je donne à m le nom de *coefficient de groupement*.

La plus importante des trois constantes est p : je la nommerai *probabilité-base*.

La constante p précise le caractère de la statistique où elle se présente.

De p dépend en effet la dissymétrie plus ou moins grande de la courbe de probabilité, donc les caractéristiques de cette courbe :

$$(1) \qquad y = \frac{m!}{(mp - x)!\,(mq + x)!}\, p^{mp-x} q^{mq+x}.$$

Voici deux exemples de telles courbes, réduites aux points obtenus en donnant à x des valeurs entières :

TABLEAU VI

$$y = \frac{400!}{(12-x)!\,(388+x)!}\, 0{,}03^{12-x} \times 0{,}97^{388+x}$$

$y_0 = 0{,}11\,612$

$y_{-1} = 0{,}10\,719$	$y_1 = 0{,}11\,582$
$y_{-2} = 0{,}09\,164$	$y_2 = 0{,}10\,563$
$y_{-3} = 0{,}07\,293$	$y_3 = 0\,08\,732$
$y_{-4} = 0{,}05\,428$	$y_4 = 0{,}06\,484$
$y_{-5} = 0{,}03\,792$	$y_5 = 0{,}04\,268$
$y_{-6} = 0{,}02\,495$	$y_6 = 0{,}02\,452$
$y_{-7} = 0{,}01\,552$	$y_7 = 0{,}01\,204$
$y_{-8} = 0{,}00\,914$	$y_8 = 0{,}00\,492$
$y_{-9} = 0{,}00\,512$	$y_9 = 0{,}00\,160$
$y_{-10} = 0{,}00\,273$	$y_{10} = 0{,}00\,039$
$y_{-11} = 0{,}00\,139$	$y_{11} = 0{,}00\,006$
$y_{-12} = 0{,}00\,067$	$y_{12} = 0{,}00\,001$

TABLEAU VII

$$y = \frac{10000!}{(10-x)!\,(9990+x)!}\,0{,}001^{10-x} \times 0{,}999^{9990+x}$$

$y_0 = 0{,}12517$

$y_{-1} = 0{,}11\,379$	$y_1 = 0{,}12\,516$
$y_{-2} = 0{,}09\,482$	$y_2 = 0{,}11\,258$
$y_{-3} = 0{,}07\,292$	$y_3 = 0{,}09\,007$
$y_{-4} = 0{,}05\,207$	$y_4 = 0{,}06\,302$
$y_{-5} = 0{,}34\,470$	$y_5 = 0{,}03\,780$
$y_{-6} = 0{,}02\,168$	$y_6 = 0{,}01\,889$
$y_{-7} = 0{,}01\,274$	$y_7 = 0{,}00\,755$
$y_{-8} = 0{,}00\,707$	$y_8 = 0{,}00\,226$
$y_{-9} = 0{,}00\,372$	$y_9 = 0{,}00\,045$
$y_{-10} = 0{,}00\,182$	$y_{10} = 0{,}00\,005$

7. On dit quelquefois que, quand le nombre de fréquences croît indéfiniment, la courbe correspondante tend à devenir symétrique : cela n'est vrai que pour la partie infiniment petite de la courbe avoisinant le sommet.

En fait, les courbes de probabilité (1) sont *peu* dissymétriques. Elles sont même « presque » symétriques par rapport à une droite issue du point $x = 0$, $y = 0$ et inclinée d'environ 10° sur $0y$.

8. *Ce qui fait le très grand intérêt des courbes de probabilité* (1) *et des courbes de fréquences* (7), *c'est que la plupart des courbes que l'on rencontre dans les statistiques, et peut-être toutes les courbes de statistiques se ramènent soit à des courbes de fréquences* (7), *soit à des sommes de courbes de fréquences* (7).

9. Les courbes de fréquences, où le nombre m est élevé, posent un problème intéressant, qui se retrouvera plus loin, à propos de l'ajustage.

Considérons le Tableau suivant, où l'on a obtenu les fréquences en arrondissant 100 y à l'unité (Voir Tableau VIII).

Le nombre total des fréquences de la 4e colonne est 295, et non pas 300, tandis que pour les Tableaux IV et V, le total est 100.

Ce total est en effet ici

$$13 + 2 \times 13 + 2 \times 13 + \cdots + 2 \times 1 = 295.$$

Si l'on veut obtenir 300 fréquences, il faudra multiplier non pas par 300, mais par un nombre un peu plus grand, 303.

TABLEAU VIII

$$y = \frac{320\,!}{(160 - x)\,!\;160 + x)\,!}\,(0{,}5)^{320}$$

Valeurs de x	y	300 y	Nombre de fréquences
0	0,044 578	13,3734	13
+ 1, — 1	0 044 292	13,2876	13
+ 2, — 2	0,043 471	13,1713	13
+ 3, — 3	0,042 138	12,7678	13
+ 4, — 4	0,040 339	12,1017	12
+ 5, — 5	0,038 039	11,4417	11
+ 6, — 6	0,035 612	10,6836	11
+ 7, — 7	0,032 839	9,8517	10
+ 8, — 8	0,029 907	8,9721	9
+ 9, — 9	0,026 899	8,0697	8
+ 10, — 10	0,023 893	7,1679	7
+ 11, — 11	0,030 958	6,2874	6
+ 12, — 12	0,018 156	5,4468	5
+ 13, — 13	0,015 532	4,6596	5
+ 14, — 14	0,013 122	3,9366	4
+ 15, — 15	0,010 947	3,2841	3
+ 16, — 16	0,009 019	2,7057	3
+ 17, — 17	0,007 338	2,2014	2
+ 18, — 18	0,005 895	1,7685	2
+ 19, — 19	0,004 676	1,3028	1
+ 20, — 20	0,003 663	1,0989	1
+ 21, — 21	0,002 833	0,8499	1
+ 22, — 22	0,002 164	0,6392	1
+ 23, — 23	0,001 632	0,4896	0

Les produits par 303 donnent des nombres un peu plus grands que ceux de la colonne $300y$, et en arrondissant ces nombres à l'unité,

13 ($x = 0$) devient 14 ;
11 ($x = \pm$ 5) » 12 ;
5 ($x = \pm$ 12) » 6.

Dans toute statistique régularisée par un procédé quelconque, où la régularisation produit un déficit (ou un excès) dans le nombre de fréquences, c'est par multiplication et non par addition que le nombre des fréquences doit être rétabli.

Dans le cas présent ce serait une erreur de forcer 0,4896 ($x = \pm$ 23) à l'unité.

Ce que nous venons de dire éclaire la question, au premier abord singulière, qui se pose quand la multiplication par m (ici par 320) donne un peu moins de m fréquences.

Le cas de $p = 0{,}5$ est *en soi tout à fait exceptionnel*. C'est quand p est très voisin de 0,5 que l'on prend $p = 0{,}5$.

Dans ce cas, si l'on a un nombre pair de fréquences à regagner, il se peut que la multiplication force le nombre de fréquences relatif à $x = 0$, ce qui augmente le nombre de fréquences d'un nombre pair. Dans ce cas, on ne peut pas rétablir le nombre voulu de fréquences. Quoi qu'on fasse, on sera au dessus ou en dessous de une unité.

III. — Les problèmes posés

10. On donne un jeu de fréquences *observé*, et le graphique a la forme d'une courbe en U renversé : il y a lieu de penser que le jeu de fréquences est disposé suivant une courbe de probabilité *simple*.

L'équation de cette courbe est de la forme

$$y = A \frac{m!}{(mp - x)!\,(mq + x)!} p^{mp-x} q^{mq+x}.$$

I. On se proposera de calculer A, qui est approximativement (approximativement seulement, on vient de le montrer) le nombre de fréquences.

II. On calculera m, *coefficient de groupement*.

III. On calculera p, *probabilité-base*.

IV. On interpolera le jeu de fréquences donné.

V. Si la courbe de fréquences présente plusieurs maxima et minima, on cherchera les courbes de probabilité simples dont la somme des ordonnées restitue la courbe de fréquences.

Ce dernier problème, extrêmement difficile, est à peine abordé : il n'en sera pas question ici.

Les problèmes I à IV sont dominés par le problème de l'*ajustage*, que nous allons étudier en premier lieu.

IV. — L'ajustage

11. Nous allons obtenir par un calcul précis, bien défini, toujours identique à lui-même, le résultat que se propose de réaliser un dessinateur habile qui, ayant tracé une courbe de fréquences, élimine avec un fin crayon les accidents de la courbe : accidents qui sont les reflets d'incidences secondaires, venant se superposer à une cause principale, dont l'effet est représenté par l'allure générale de la courbe de fréquences.

Ces irrégularités de la courbe s'atténuent à mesure que le nombre de fréquences observé croît.

Le calcul réalise la courbe qu'un nombre infini d'observations, ou du moins un nombre extrêmement grand, permettrait de tracer.

A. — La probabilité est 0,5 et le jeu de fréquences est complètement connu

12. *Méthode d'ajustage usuelle.* — Considérons le jeu de fréquences défini par la formule

$$2000\,\frac{100\,!}{(50-x)\,!\,(50+x)\,!}\,0{,}5^{100}$$

du Tableau V. Ces nombres $2000y$ et les nombres arrondis, ou nombres de fréquences, sont :

TABLEAU IX

$$y=\frac{100\,!}{(50-x)\,!\,(50+x)\,!}\,0{,}5^{100}$$

x	2000 y	Nb. de fréq.	
0	159,178	159	log 159 = 2,20140
± 1	156,056	156	» 156 = 2,19312
± 2	147,054	147	» 147 = 2,16732
± 3	133,182	133	» 133 = 3,12385
± 4	115,916	116	» 116 = 2,06446
± 5	96,958	97	» 97 = 1,98677
± 6	77,906	78	» 78 = 1,89209
± 7	60,138	60	» 60 = 1,77815
± 8	44,584	45	» 45 = 1,65321
± 9	31,738	32	» 32 = 1,50515
± 10	21,688	22	» 22 = 1,34242
± 11	14,222	14	» 14 = 1,14613
± 12	8,948	9	» 9 = 0,95424
± 13	5,396	5	» 5 = 0,69897
± 14	3,120	3	» 3 = 0,47712
± 15	1,728	2	» 2 = 0,30303
± 16	0,916	1	» 1 = 0
± 17	0,464	4	

Ce tableau indique 159 fréquences d'écart 0 ; 156 fréquences d'écart 1 et 156 fréquences d'écart — 1, etc...

Nous pouvons admettre que ces fréquences sont des températures mesurées au dixième de degré près et groupées par degrés : 0°, ± 1°, ± 2°,... : on a trouvé 159 températures entre — 0°5 et + 0°5 ; 156 températures entre 0°5 et 1°5, etc...

Si l'on groupait aux degrés $-0°5$, $+0°5$, $1°5$, on trouverait sensiblement

$\frac{159+156}{2} = 157{,}5$ températures $-0°{,}5$ ou $+0°{,}5$: écarts $\pm 0{,}5$

$\frac{156+147}{2} = 151{,}5$ » $-1°{,}5$ ou $+1°{,}5$: » $\pm 1{,}5$

$\frac{147+133}{2} = 140{,}0$ » $-2°{,}5$ ou $+2°{,}5$: » $\pm 2{,}5$

. . . . .

$\frac{2+1}{2} = 1{,}5$ » $-15°{,}5$ ou $+15°{,}5$: » $\pm 15{,}5$

Cela posé, on écrira [1]

$$157{,}5\times 0{,}5^2 + 151{,}5\times 1{,}5^2 + 140{,}0\times 2{,}5^2 + \cdots + 1{,}5\times 15{,}5^2 = 23565{,}625,$$

$$\epsilon^2 = \frac{2\times 23565{,}625}{2000},$$

car il y a 2000 fréquences en tout ; puis

$$h^2 = \frac{2}{2\epsilon^2}, \quad \text{d'où} \quad h = 0{,}146.$$

On calcule ensuite [2] les nombres $1000\,\theta\left(\frac{h}{2}\right)$, $1000\,\theta\left(\frac{3h}{2}\right)$, $1000\,\theta\left(\frac{h5}{2}\right)$, ... ainsi que leurs différences δ :

$\theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}08270$ $\quad 1000\,\theta\left(\frac{h}{2}\right) = 83$

$\theta\left(\frac{3h}{2}\right) = 0{,}24322$ $\quad 1000\,\theta\left(\frac{3h}{2}\right) = 243$ $\quad \delta_1 = 160$

$\theta\left(\frac{5h}{2}\right) = 0{,}39427$ $\quad 1000\,\theta\left(\frac{5h}{2}\right) = 394$ $\quad \delta_2 = 151$

. . . . . .

[1] *La formule fondamentale de la Théorie des Erreurs ; Démonstration, vérification*, Ann. Soc. scient. de Bruxelles, Tome XLIV, 1924-1925, Mémoires, p. 147. La démonstration donnée est indépendante de toute notion de probabilité. Elle suppose simplement que les différences secondes des ordonnées des courbes de probabilité sont constantes.

[2] Les Tables de la fonction θ sont très répandues. On les trouvera p. e. dans les *Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités* de R. de Montessus de Ballore. Gauthier-Villars, à Paris, 1907.

On a par conséquent

83	fréquences	dans l'intervalle	$-0{,}5$ à 0
83	»	»	0 à $0{,}5$
donc 166	»	»	$-0{,}5$ à $+0{,}5$
160	»	»	$-1{,}5$ à $-0{,}5$
160	»	»	$+0{,}5$ à $+1{,}5$
151	»	»	$-2{,}5$ à $-1{,}5$
151	»	»	$+1{,}5$ à $+2{,}5$

. . . . . .

c'est-à-dire

166	fréquences	d'écart	0.
160	»	»	-1 ou $+1$
151	»	»	-2 ou $+2$

. . . . . .

On retrouve *à peu près* le jeu

$$159,\ 156,\ 147,\ \ldots$$

d'où l'on est parti.

On calcule souvent ϵ^2 par la formule

$$\epsilon^2 = \frac{159 \times 1^2 + 156 \times 2^2 + \cdots + 1 \times 16^2}{2000}$$

Les résultats sont alors plus éloignés de la suite donnée que ceux trouvés en employant les moyennes 157,5 ; 151,5 ; .....

13. *Ajustage par les moindres carrés.* Nous admettons qu'un jeu de fréquences, probabilité 0,5, tel que celui du Tableau IX, est convenablement représenté par la formule approchée (4) $Ae^{-h^2x^2}$.

Dans quelle mesure cela est-il vrai ?

Nous n'en savons rien, absolument rien, à priori.

Nous allons l'examiner.

Écrivons

$$y = \frac{100\,!}{(50-x)\,!\,(50+x)\,!}\,0{,}5^{100} = Ae^{-h^2x^2}.$$

Nous avons

$$\log y = -h^2x^2\mathrm{M} + \log \mathrm{A} \qquad \mathrm{M} = \log e.$$

Posons

$$h^2\mathrm{M} = w \qquad \log \mathrm{A} = u.$$

Il vient

$$\log y = u - vw^2.$$

Attribuons à x les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 16$. Nous obtiendrons le système d'équations que voici :

MULTIPLICATEURS		
0	$u - 16^2 w = \log$	$1 = 0,$
0	$u - 15^2 w = \log$	$2 = 0,30103$
0	$u - 14^2 w = \log$	$3 = 0,47712$
0	$u - 13^2 w = \log$	$5 = 0,60897$
0,1	$u - 12^2 w = \log$	$9 = 0,95424$
0,1	$u - 11^2 w = \log$	$14 = 1,14613$
0,2	$u - 10^2 w = \log$	$22 = 1,34242$
0,2	$u - 9^2 w = \log$	$32 = 1,50515$
0,3	$u - 8^2 w = \log$	$45 = 1,65321$
0,4	$u - 7^2 w = \log$	$60 = 1,77815$
0,5	$u - 6^2 w = \log$	$78 = 1,89209$
0,6	$u - 5^2 w = \log$	$97 = 1,98677$
0,7	$u - 4^2 w = \log$	$116 = 2,06446$
0,8	$u - 3^2 w = \log$	$133 = 2,12385$
0,9	$u - 2^2 w = \log$	$147 = 2,16732$
1	$u - w = \log$	$156 = 2,19312$
1	$u = \log$	$159 = 2,20140$
	Total	1999

On a introduit des multiplicateurs pour la raison suivante.

Supposons que nous nous trouvions en présence d'une statistique.

Les nombres 159, 156, 147,... seront sujets à des variations plus ou moins grandes, en raison des incidences secondaires.

Au lieu de 159, 156, 147,... la statistique donnera

$$\begin{aligned} &159 + \epsilon_1 \\ &156 + \epsilon_2 \\ &147 + \epsilon_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Nous ne connaissons pas les ϵ ; nous admettons qu'ils sont *égaux*. On peut, pour ce qui suit, leur donner la valeur 1.

On a

$$\begin{aligned} &\log 160 - \log 159 = 272 \\ &\text{» } 157 - \text{» } 156 = 278 \\ &\text{» } 148 - \text{» } 147 = 294 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

et, *au dixième près*,

$$\begin{aligned} &278 = 272 \\ &294 = 272 \times 0,9 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

La résolution, par les moindres carrés, du système qui précède donne, *abstraction faite des multiplicateurs*

$$17u_1 - 1496w_1 = 24{,}48543$$
$$1496u_1 - 8.17.11.163w_1 = 1185{,}35233$$
$$u_1 = 2{,}20060 \qquad w_1 = 0{,}0864$$

En calculant

$$u_1 - 16^2w_1, \qquad u_1 - 15^2w_1, \ldots$$

on trouve les résultats suivants

TABLEAU X

						VAL. VRAIES
$\log y'_{16} = u_1 - 16^2w_1 = 1{,}98876$	$y'_{16} =$	0,97	soit	1	pour	1
» $y'_{15} = u_1 - 15^2w_1 = 0{,}25666$	$y'_{15} =$	1,81	»	2	»	2
» $y'_{14} = u_1 - 14^2w_1 = 0{,}50716$	$y'_{14} =$	3,21	»	3	»	3
» $y'_{13} = u_1 - 13^2w_1 = 0{,}74044$	$y'_{13} =$	5,51	»	6	»	5
» $y'_{12} = u_1 - 12^2w_1 = 0{,}94644$	$y'_{12} =$	9,26	»	9	»	9
» $y'_{11} = u_1 - 11^2w_1 = 1{,}15516$	$y'_{11} =$	14,29	»	14	»	14
» $y'_{10} = u_1 - 10^2w_1 = 1{,}33660$	$y'_{10} =$	21,21	»	22	»	22
» $y'_9 = u_1 - 9^2w_1 = 1{,}50076$	$y'_9 =$	31,68	»	32	»	32
» $y'_8 = u_1 - 8^2w_1 = 1{,}64764$	$y'_8 =$	44,43	»	44	»	45
» $y'_7 = u_1 - 7^2w_1 = 1{,}77724$	$y'_7 =$	59,82	»	60	»	60
» $y'_6 = u_1 - 6^2w_1 = 1{,}88956$	$y'_6 =$	79.45	»	79	»	78
» $y'_5 = u_1 - 5^2w_1 = 1{,}90460$	$y'_5 =$	92,62	»	97	»	97
» $y'_4 = u_1 - 4^2w_1 = 2{,}06236$	$y'_4 =$	115,41	»	115	»	116
» $y'_3 = u_1 - 3^2w_1 = 2{,}12284$	$y'_3 =$	132,69	»	133	»	133
» $y'_2 = u_1 - 2^2w_1 = 2{,}16604$	$y'_2 =$	147,57	»	147	»	147
» $y'_1 = u_1 - 1^2w_1 = 2{,}19196$	$y'_1 =$	155,58	»	156	»	156
» $y_0 = u_1 = 2{,}20060$	$y'_0 =$	158,71	»	159	»	159

L'ajustage par les moindres carrés donne donc des résultats meilleurs que l'ajustage par la méthode usuelle.

On observera que la méthode des moindres carrés prête non seulement aux restrictions usuelles d'indémontrabilité, mais encore à cette remarque : qu'on la fait jouer ici sur des logarithmes. Mais nous n'avons que le résultat en vue ; ce résultat vaut qu'on s'arrête à la méthode employée.

En introduisant les multiplicateurs, on trouve

$$4{,}90u_2 - 59{,}33w_2 = 10{,}277358,$$
$$59{,}33u_2 - 2509{,}25w_2 = 109{,}340\,891,$$
$$u_2 = 2{,}199\,51 \qquad w_2 = 0{,}00843$$

et on est conduit à des valeurs presque identiques de y.

Aussi bien, ces multiplicateurs n'ont d'intérêt que pour des statistiques *vraies*, où ils atténuent les variations inacceptables des nombres extrêmes.

B. — Cas ou le jeu de fréquences est imcomplètement connu

14. *Seule, la méthode des moindres carrés permet alors l'ajustage.*

Supposons que nous connaissions seulement les nombres de fréquences (TABLEAU IX)

Valeurs y	*de 2000*y	
± 3	78	log 78 = 1,89209
± 4	97	» 97 = 1,98677
± 5	116	» 116 = 2,06446
± 6	133	» 133 = 2,12385

Nous devons écrire

Multiplicateurs		
0,5	$u - 6^2w = 1,89209$	$0,5u - 0,5 \times 6^2w = 1,89209 \times 0,5$
0,6	$u - 5^2w = 1,98677$	$0,6u - 0,6 \times 5^2w = 1,98677 \times 0,6$
0,7	$u - 4^2w = 2,06446$	$0,7u - 0,7 \times 4^2w = 2,06446 \times 0,7$
0,8	$u - 3^2w = 2,12385$	$0,8u - 0,8 \times 3^2w = 2,12385 \times 0,8$

La résolution de ce système, par les moindres carrés, donne

$$1,74u - 31,60w = 3,55911$$
$$31,60u - 726,28w = 63,32849$$
$$u_3 = 2,2014 \qquad w_3 = 0,00858$$

et il en résulte

$$\log y_o = u_3 = 2,4014 \qquad y = 159$$
$$\log y_1 = u_3 - w_3 = 21928 \qquad y_1 = 156$$

. . . . .

L'ajustage est donc obtenu.

C. — La probabilité diffère de 0,5

15. Dans le cas de $p = 0,5$, nous avons ajusté au moyen de la formule (4) réduite à $y = Ae^{-h^2x^2}$.

Si p diffère de 0,5 nous ajusterons par la formule (5) écrite

$$(8) \qquad y = Ue^{(-vx^3 - wx^2 + tx)\frac{1}{M}} \qquad M = \log e$$

c'est-à-dire :

Nous calculerons u, v, w, t *par les moindres carrés*, exactement comme nous avons calculé u, w quand la probabilité est 0,5.

Nous allons donner un exemple où le jeu de fréquences est complètement connu.

Le calcul serait identique, si le jeu de fréquences était incomplètement connu.

Partons du jeu de fréquences donné dans le tableau suivant :

TABLEAU IX

$$y = \frac{180\,!}{(18-x)\,!\,(162+x\,!)}\,0{,}1^{18-x}\times 0{,}9^{162+x} \qquad (p = 0{,}1)$$

Valeurs de x	Valeurs de y						Multiplicateurs
—11	0,003245	$600\,y$	= 2	pour	1,9470	log 2 = 0,201 0300	0,07
—10	0,005571	»	= 3	»	3,3426	» 3 = 0,477 1213	0,1
— 9	0,009177	»	= 6	»	5.5062	» 6 = 0.778 1513	0,2
— 8	0,014480	»	= 9	»	8,6880	» 9 = 0,954 2425	0,2
— 7	0,021860	»	= 13	»	13,1160	» 13 = 1,113 9434	0,5
— 6	0,031538	»	= 19	»	18,9180	» 19 = 1,278 7536	0,5
— 5	0,043378	»	= 26	»	26,0268	» 26 = 1,414 9733	0,5
— 4	0,046830	»	= 34	»	34,0980	» 34 = 1,531 4789	1
— 3	0,070770	»	= 42	»	42,4620	» 42 = 1,723 2493	1
— 2	0.083597	»	= 50	»	50,1582	» 50 = 1,698 9709	1
— 1	0,093463	»	= 56	»	59,0778	» 56 = 1,748 1880	1
0	0,098655	»	= 59	»	56,1930	» 59 = 1,770 8520	1
+ 1	0,098050	»	= 59	»	58,8300	» 59 = 1,770 8520	1
+ 2	0,091473	»	= 55	»	54,8858	» 55 = 1,720 3627	1
+ 3	0,076831	»	= 48	»	47,8986	» 48 = 1,681 2412	1
+ 4	0,064923	»	= 39	»	38,6538	» 39 = 1,591 0646	1
+ 5	0,048931	»	= 29	»	29,3904	» 29 = 1,462 3980	0,5
+ 6	0,034113	»	= 20	»	20,5678	» 20 = 1,301 0300	0,5
+ 7	0,021800	»	= 13	»	13,0800	» 13 = 1,113 9434	0,5
+ 8	0,012695	»	= 8	»	7,6170	» 8 = 0,903 6900	0,2
+ 9	0,066682	»	= 4	»	3,9082	» 4 = 0,620 0600	0,2
+10	0,0013+7	»	= 2	»	1,8882	» 2 = 0,301 0300	0,1
+11	0,001310	»	= 1	»	0,7860	» 1 = 0	0,07

Système d'équations

$$u - 11^2w + 11^3v - 11\,t = 0{,}301\,0300$$
$$u - 10^2w + 10^3v - 10\,t = 0{,}477\,1213$$
$$u - 9^2w + 9^3v - 9\,t = 0{,}778\,1513$$
$$u - 8^2w + 8^3v - 8\,t = 0{,}954\,2425$$
$$u - 7^2w + 7^3v - 7\,t = 1{,}113\,9434$$
$$u - 6^2w + 6^3v - 6\,t = 1{,}278\,7536$$
$$u - 5^2w + 5^3v - 5\,t = 1{,}414\,9733$$
$$u - 4^2w + 4^3v - 4\,t = 1{,}531\,4789$$
$$u - 3^2w + 3^3v - 3\,t = 1{,}623\,2493$$
$$u - 2^2w + 2^3v - 2\,t = 1{,}698\,9700$$
$$u - 1^2w + 1^3v - 1\,t = 1{,}748\,1880$$
$$u = 1{,}770\,8520$$

$$u - 1^2w - 1^3v + 1t = 1{,}770\,8520$$
$$u - 2^2w - 2^3v + 2\,t = 1{,}740\,3627$$
$$u - 3^2w - 3^3v + 3\,t = 1{,}681\,2412$$
$$u - 4^2w - 4^3v + 4\,t = 1{,}591\,0646$$
$$u - 5^2w - 5^3v + 5\,t = 1{,}462\,3980$$
$$u - 6^2w - 6^3v + 6\,t = 1{,}301\,0300$$
$$u - 7^2w - 7^3v + 7\,t = 1{,}113\,9434$$
$$u - 8^2w - 8^3v + 8\,t = 0{,}903\,0900$$
$$u - 9^2w - 9^3v + 9\,t = 0{,}620\,0600$$
$$u - 10^2w - 10^3v + 10\,t = 0{,}301\,0300$$
$$u - 11^2w - 11^3v + 11\,t = 0$$

La relation (8) donne

$$\log y = \log U - vx^3 - wx^2 + tx,$$

$$-vx^3 - wx^2 + tx + u = \log y \qquad u = \log U$$

et le système d'équations écrit dans le Tableau a été obtenu en donnant à x les valeurs $-11, -10, \ldots\ldots$

Les multiplicateurs ont été calculés comme dans le cas indiqué pour $p = 0{,}5$.

En faisant usage des multiplicateurs, on trouve les équations

$$\begin{cases} 10{,}6898\,u - 129{,}7858\,w = 17{,}216\,2774 \\ 129{,}7858\,u - 4065{,}0418\,w = 175{,}654\,00542 \end{cases}$$

d'où

$$u_1 = 1{,}77329076 = \log 59{,}3322$$
$$w_1 = 0{,}01340551$$

et

$$\begin{cases} 4065{,}0418\,v - 129{,}7858\,t = -0{,}496\,86706 \\ 200593{,}0978\,v - 4065{,}0418\,t = 1{,}488\,60689 \end{cases}$$

d'où

$$v_1 = 0{,}000\,2327$$
$$t_1 = 0{,}011\,1171.$$

Calculons maintenant

$$a_1 = u_1 - 11^2 w_1 + 11^3 v_1 - 11\,t_1$$
$$a_2 = u_1 - 10^2 w_1 + 10^3 v_1 - 10\,t_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et $\log b_1 = a_1$, $\log b_2 = a_2$, $\ldots\ldots$; nous obtenons les résultats que voici :

$a_1 = 0{,}338\,6609$	$b_1 = 2{,}1810$	$a'_1 = 0{,}318\,9088$	$b'_1 = 2{,}0841$
$a_2 = 0{,}554\,2698$	$b_2 = 3{,}5832$	$a'_2 = 0{,}543\,2080$	$b'_2 = 3{,}4931$
$a_3 = 0{,}757\,0297$	$b_3 = 5{,}7151$	$a'_3 = 0{,}751\,8682$	$b'_3 = 5{,}6477$
$a_4 = 0{,}945\,5444$	$b_4 = 8{,}8215$	$a'_4 = 0{,}944\,0819$	$b'_4 = 8{,}7920$
$a_5 = 1{,}118\,4177$	$b_5 = 13{,}1346$	$a'_5 = 1{,}118\,9797$	$b'_5 = 13{,}1516$
$a_6 = 1{,}274\,2534$	$b_6 = 18{,}804!$	$a'_6 = 1{,}275\,6301$	$b'_6 = 18{,}8638$
$a_7 = 1{,}411\,6553$	$b_7 = 25{,}8021$	$a'_7 = 1{,}413\,0398$	$b'_7 = 25{,}8845$
$a_8 = 1{,}529\,2272$	$b_8 = 33{,}8358$	$a'_8 = 1{,}530\,1532$	$b'_8 = 33{,}8963$
$a_9 = 1{,}625\,5729$	$b_9 = 42{,}2253$	$a'_9 = 1{,}625\,8532$	$b'_9 = 42{,}2525$
$a_{10} = 1{,}699\,2662$	$b_{10} = 50{,}0376$	$a'_{10} = 1{,}698\,9603$	$b'_{10} = 49{,}9989$
$a_{11} = 1{,}749\,0009$	$b_{11} = 56{,}1050$	$a'_{11} = 1{,}748\,2333$	$b'_{11} = 56{,}0058$
$a_{12} = 1{,}773\,2908$	$b_{12} = 59{,}3322$	$a'_{12} = 1{,}772\,3590$	$b'_{12} = 59{,}2064$
$a_{13} = 1{,}770\,7697$	$b_{13} = 58{,}9888$	$a'_{13} = 1{,}770\,0021$	$b'_{13} = 58{,}884?$
$a_{14} = 1{,}740\,0414$	$b_{14} = 54{,}9593$	$a'_{14} = 1{,}739\,7055$	$b'_{14} = 54{,}9170$
$a_{15} = 1{,}679\,7097$	$b_{15} = 47{,}8310$	$a'_{15} = 1{,}679\,9900$	$b'_{15} = 47\,8619$
$a_{16} = 1{,}588\,3784$	$b_{16} = 38{,}7595$	$a'_{16} = 1{,}589\,3044$	$b'_{16} = 38{,}8423$
$a_{17} = 1{,}464\,6513$	$b_{17} = 29{,}1508$	$a'_{17} = 1{,}466\,0358$	$b'_{17} = 29{,}2439$
$a_{18} = 1{,}307\,1322$	$b_{18} = 20{,}2830$	$a'_{18} = 1{,}308\,5089$	$b'_{18} = 20{,}3474$
$a_{19} = 1{,}114\,4249$	$b_{19} = 13{,}0144$	$a'_{19} = 1{,}114\,9869$	$b'_{19} = 13{,}0313$
$a_{20} = 0{,}885\,1332$	$b_{20} = 7{,}6760$	$a'_{20} = 0{,}883\,6707$	$b'_{20} = 7{,}6502$
$a_{21} = 0{,}617\,8609$	$b_{21} = 4{,}1482$	$a'_{21} = 0{,}612\,6994$	$b'_{21} = 4{,}0992$
$a_{22} = 0{,}311\,2118$	$b_{22} = 2{,}0474$	$a'_{22} = 0.300\,1500$	$b'_{22} = 1{,}9969$
$a_{23} = 1{,}963\,7897$	$b_{23} = 0{,}9200$	$a'_{23} = 1{,}944\,0376$	$b'_{23} = 0{,}8791$

On comparera les nombres b_1, b_2, b_3, ... 1° avec les nombres bases du calcul : 2, 3, 6, 9, ... 2° avec les nombres « vrais » : 1,9470 ; 3,3426 ; 5,5062 ; ....

16. Il est extrêmement important de remarquer ceci : *Les différences entre les nombres* b_i *et les nombres* « vrais » :

$$\begin{aligned} 2{,}1810 - 1{,}9470 &= 0{,}2340 \\ 3{,}5832 - 3{,}3426 &= 0{,}2406 \\ 5{,}7151 - 5{,}6062 &= 0{,}2089 \end{aligned}$$

. . . . .

$$\begin{aligned} 59{,}3322 - 59{,}1930 &= 0{,}1392 \\ 58{,}9888 - 58{,}8300 &= 0{,}1588 \\ 54{,}9593 - 54{,}8858 &= 0{,}0735 \end{aligned}$$

. . . . .

sont moindres en moyenne que les différences

$$\begin{aligned} 2 - 1{,}9470 &= 0{,}0520 \\ 3{,}3426 - 3 &= 0{,}3426 \\ 6 - 5{,}5062 &= 0{,}4938 \end{aligned}$$

. . . . .

$$\begin{aligned} 59{,}1930 - 59 &= 0{,}1930 \\ 59 - 58{,}8300 &= 0{,}1700 \\ 55 - 54{,}8858 &= 0{,}1142 \end{aligned}$$

. . . . .

Nous trouvons donc des nombres b_i *plus près des nombres* « vrais » *que ne le sont les nombres* 2, 3, 6, 9, ... *qui ont servi de base au calcul.*

Le calcul ajuste bien à la manière d'un dessinateur qui éliminerait, avec son crayon, les petites irrégularités du graphique représentant la statistique : avec cette supériorité que l'équation personnelle du statisticien n'est plus en jeu.

17. Les nombres a'_1, b'_1 ont été calculés en introduisant une 5e variable z:

$$u - 11^2 w + 11^3 v - 11 t + 11^4 z = 0{,}301\,0300.$$

. . . . . .

On est ainsi plus près de la formule (3).

Ce système en u, v, w, t, z donne

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 = 0{,}013\,40551 \\ t_2 &= t_1 = 0{,}011\,1171 \\ u_2 &= 1{,}772\,23690 \\ z_2 &= 0{,}00\,000\,2582\,. \end{aligned}$$

18. Dispositions pratiques.

I. Les calculs sont grandement facilités quand les équations et les multiplicateurs sont *symétriques* par rapport à l'équation

$$u = \log y_o.$$

On peut, pour obtenir la symétrie, 1° négliger quelques-unes des équations extrêmes, 2° forcer tel ou tel multiplicateur de 0,1 ou 0,2.

La symétrie décompose le système u, v, w, t en deux systèmes,

l'un en u, w,
l'autre en v, t.

II. En raison de la nécessité d'obtenir u, v, w, t très exactement, on résoudra les équations par la méthode des déterminants, exclusivement à toute autre méthode.

III. Quand on ne dispose que d'une moitié de la statistique (valeurs de y pour $x > 0$ **ou** pour $x < 0$), ou quand la statistique, incomplète, se rapporte à des valeurs de x seulement positives, ou seulement négatives, on doit se borner à chercher une représentation de la forme

$$y = Ae^{-h^2x^2},$$

sauf le cas très rare où la statistique est parfaitement régulière.

On obtient ainsi une bonne régularisation de la statistique : mais le calcul à posteriori de m et de p, que nous ferons tout à l'heure, est bien entendu impossible.

Cela tient à ce qu'une courbe de probabilité ($p \neq 0{,}5$) est assez convenablement représentée par deux demi-courbes de probabilité ($p = 0{,}5$) se rejoignant sur Oy.

V. — L'Interpolation [1]

19. La fonction θ représente *mal* les courbes de probabilité où $p \neq 0{,}5$ [2] ; elle représente au contraire fort bien un arc limité de ces courbes, comme nous allons le voir sur un exemple.

Partons de la courbe de probabilité

$$(9) \qquad y = \frac{100\,!}{(10-x)\,!\,(90+x)\,!}\,0{,}1^{10-x} \times 0{,}9^{90+x}$$

---

[1] L'interpolation pose d'ordinaire un problème plus compliqué que celui étudié ici. On en trouvera la solution dans les Ann. Soc. scient. de Bruxelles, 1926, avec une application aux statistiques d'accidents du travail en Belgique.

[2] Mém. de l'Office national Météor. de France : *loc. cit.*

on trouve

$$y_o = 0{,}131\,865$$

$y_1 = 0{,}119\,877$	$y_o + y_1 = 0{,}251\,742$
$y_2 = 0{,}098\,788$	$y_o + y_1 + y_2 = 0{,}350\,530$
$y_3 = 0{,}074\,302$	$y_o + y_1 + \ldots + y_3 = 0{,}424\,832$
$y_4 = 0{,}051\,304$	$y_o + y_1 + \ldots + y_4 = 0{,}476\,136$
$y_5 = 0{,}032\,682$	$y_o + y_1 + \ldots + y_5 = 0{,}508\,818$

Nous allons assimiler un arc de la courbe (9) à un arc de la courbe

$$y = Ae^{-h^2x^2}$$

et résoudre ainsi le problème de l'interpolation.

A cet effet, nous poserons

$$(10) \qquad \begin{cases} a\theta(3h) = 0{,}350\,530 \\ a\theta(5h) = 0{,}476\,136\ ; \end{cases}$$

$3h$ et $5h$ n'ont pas été choisis sans raison : nous calculerons $a\theta(4h)$ et nous comparerons le résultat avec

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = 0{,}424\,832,$$

ce qui nous fixera sur la valeur de la méthode employée.

Nous avons de plus choisi $3h$ et $5h$ et non pas $2h$ et $4h$, parce que nous savons *a priori* qu'il s'agit des intervalles relatifs à $y_0 + y_1 + y_2$, $y_0 + y_1 + \ldots + y_5$.

Quand on ne connaît pas cette particularité, la solution du problème est parfaitement accessible, mais exige des considérations supplémentaires.

On déduit du système d'équation (10)

$$\frac{\theta(5h)}{\theta(3h)} = \frac{0{,}476\,136}{0{,}350\,530}$$

relation qui permet de calculer h par tâtonnements : le calcul est facile.

On observe à ce propos que les tables de la fonction θ peuvent être interpolées par parties proportionnelles quand on se borne aux 5 premières décimales de θ, ce qui suffit dans le cas présent.

Ici, l'on trouve

$$h = 0{,}2185 \qquad a = 0{,}54\,2565.$$

Avec ces valeurs de a et de h, on a

		δ
$a\theta(3h) = 0{,}350\,535$	pour $0{,}350\,540$	$-0{,}000\,005$
$a\theta(5h) = 0{,}476\,128$	pour $0{,}476\,136$	$-0{,}000\,008$

Interpolons en calculant $a\theta(4h)$; on trouve

$$a\theta(4h) = 0{,}425\,121 \quad \text{pour } 0{,}424\,832 \qquad \delta = 0{,}000\,289.$$

Par conséquent, pour un jeu de 1250 fréquences positives, de l'ordre de 2500 fréquences en tout, on aurait

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \text{ (calculé)} = 532{,}40125 \quad \text{soit } 532,$$

au lieu de

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \text{ (observé)} = 531.$$

Il est clair que les valeurs de a et de h obtenues permettent le calcul du nombre de fréquences qui ont pour écarts $y_2 + \frac{1}{10}$, $y_2 + \frac{2}{10}$,... p. e. et en général $y_2 + \epsilon_1$, $y_2 + \epsilon_2$,...

jusqu'à y_4 ; le problème de l'interpolation est ainsi résolu.

VI. — Le calcul des constantes fondamentales de la courbe de probabilité

20. On donne une statistique dont le graphique affecte la forme d'une courbe de probabilité *simple*.

Nous avons *ajusté* la statistique par le calcul de u, v, w, t.

Nous l'avons interpolée.

Il reste à calculer m, p, q, après avoir divisé chacun des nombres de la statistique par le total des fréquences.

Il est extrêmement important de connaître la probabilité-base p *qui caractérise le phénomène ayant donné lieu à la statistique : des valeurs identiques de* p, *trouvées dans deux statistiques différentes, établiront un lien de grande importance entre les statistiques*, p. e. la parenté étroite de deux races humaines, de deux espèces végétales, de deux classes.

Prenons comme base de calcul les nombres

$$y = \frac{180\,!}{(18-x)\,!\,(162+x)\,!}\, 0{,}1^{18-x} \times 0{,}9^{162+x}$$

du Tableau XI (colonne : Valeurs de y).

Nous allons d'abord calculer le produit mpq.

Nous calculerons ensuite des valeurs approchées de p et q.

Il nous sera alors possible de déterminer m et, de mpq et m nous déduirons les valeurs définitives de p et q.

21. Calcul du produit mpq. Ici, $mpq = 16{,}2$.
La formule (3) donne, en faisant $y = 0$:

$$y_o^2 = \frac{1}{2\pi mpq}.$$

On en tire $$mpq = \frac{1}{2\pi y_o^2}.$$

Dans le cas présent, on aurait 16,352 au lieu de 16,2, valeur vraie.
On peut ainsi avoir rapidement une idée de l'ordre de grandeur de mpq. Cela est souvent utile.
Nous allons calculer mpq plus exactement.

22. La formule réduite (5) donne, en écrivant $\log e = \mathrm{M}$,

$$\frac{1}{\mathrm{M}}(\log y_x - \log\sqrt{2\pi mpq}) = -\frac{p-q}{2mpq}x - \frac{x^2}{2mpq} + \frac{p-q}{6m^2p^2q^2}x^3$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}}(\log y_{-x} - \log\sqrt{2\pi mpq}) = \frac{p-q}{2mpq}x - \frac{x^2}{2mpq} - \frac{p-q}{6m^2p^2q^2}x^3$$

Par soustraction :

$$\frac{1}{\mathrm{M}}(\log y_{-x} - \log y_x) = +\frac{p-q}{mpq}x - \frac{p-q}{3m^2p^2q^2}x^3 = +\frac{p-q}{mpq}x\left(1 - \frac{x^2}{3(mpq)}\right)$$

Donnons à x les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... Il vient

$$\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{1}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}098050 - \log 0{,}093463) = 0{,}0208079$$

$$2\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{2^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}091473 - \log 0{,}083597) = 0{,}0391022$$

$$3\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{3^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}079831 - \log 0{,}070770) = 0{,}0523224$$

$$4\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{4^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}064923 - \log 0{,}056830) = 0{,}0578209$$

$$5\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{5^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}048931 - \log 0{,}043378) = 0{,}0523146$$

$$6\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{6^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}034113 - \log 0{,}031350) = 0{,}0341959$$

$$7\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{7^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}021800 - \log 0{,}021860) = 0{,}0011937$$

$$8\,\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{8^2}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log 0{,}012695 - \log 0{,}014480) = 0{,}0571359$$

Le changement de signe des nombres de la dernière colonne indique que l'équation

$$\frac{p-q}{mpq}\,x\left(1-\frac{x^2}{3(mpq)}\right)=\frac{1}{M}\,(\log y_{-x}-\log y_{+x})$$

a une racine x voisine de 7 et un peu plus petite que 7.

Nous allons calculer cette racine R.

Il en résultera

$$1-\frac{R^2}{3(mpq)}=0,$$

$$mpq=\frac{R^2}{3}.$$

Nous savons que les nombres $\log y_{-1}$, $\log y_{-2}$, $\log y_{-3}$, ... ont des différences 3es à peu près constantes.

Les nombres $\log y_1$, $\log y_2$, $\log y_3$, ..., ont aussi des différences 3es à peu près constantes.

Nous écrirons en conséquence, en prenant les log avec 5 décimales :

$$\begin{aligned}
d &= \log 0{,}048391 = \bar{2},68477\\
a+b+c+d &= \log 0{,}034113 = \bar{2},53292\\
2^3a+2^2b+2c+d &= \log 0{,}021800 = \bar{2},33846\\
3^3a+3^2b+3c+d &= \log 0{,}012695 = \bar{2},10363
\end{aligned}$$

$$(C)\qquad aX^3+bX^2+cX+d=0,$$

$$\begin{aligned}
d' &= \log 0{,}043378 = \bar{2},63727\\
a'+b'+c'+d' &= \log 0{,}031530 = \bar{2},49872\\
2^3a'+2^2b'+2c'+2d' &= \log 0{,}021860 = 2,33965\\
3^3a'+3^2b'+3c'+3d' &= \log 0{,}014480 = 2,16077
\end{aligned}$$

$$(C')\qquad a'X^3+b'X^2+c'X+d'=0,$$

et nous chercherons la racine commune aux équations (C, C').

On trouve

$a = 0{,}000373$	$a' = 0{,}000118$
$b = -0{,}022425$	$b' = -0{,}010615$
$c = -0{,}129798$	$c' = -0{,}128053$
$d = -1{,}31523$	$d' = -1{,}36273$

La racine commune aux équations (C, C') est

$$X = 1{,}973.$$

Puisque X = 0 correspond aux nombres 0,048391 ; 0,043378, qui correspondent eux-mêmes à $x = 5$ ou -5, à X = 1,973 correspondra

$$R = 5 + 1{,}973 = 6{,}973.$$

Il en résulte

$$mpq = \frac{6{,}973^2}{3} = 16{,}212.$$

La connaissance de p et q donnerait ($p = 0{,}1 \quad q = 0{,}9$) :

$$m = \frac{16{,}212}{pq} = \frac{16{,}212}{0{,}09} = 180{,}1.$$

La connaissance de m donnerait

$$pq = \frac{180}{16{,}212} = 0{,}090\,057$$

avec

$$p + q = 1,$$

et l'on en déduirait

$$p = 0{,}10007 \qquad q = 0{,}89993.$$

23. Calcul de $p - q$ *(valeur provisoire).*

On a écrit un peu plus haut

$$\frac{p-q}{mpq}\left(1 - \frac{1}{3(mpq)}\right) = \frac{1}{M}(\log 0{,}098050 - \log 0{,}093463) = \frac{0{,}020879}{M} = 0{,}0479120$$

en utilisant la formule réduite (5).

En remplaçant mpq par la valeur trouvée 16,212, on obtient ($p+q=1$) :

$$q - p = 0{,}79306$$
$$q = 0{,}8965$$
$$p = 0{,}1035$$

pour 0,9 et 0,1.

On pourrait croire que l'emploi de la formule

$$(10) \qquad \frac{1}{M}(\log y_x - \log y_{-x}) = -\frac{(p-q)x}{mpq} + \left(\frac{p-q}{3m^2p^2q^2} - \frac{p^3-q^3}{3m^3p^3q^3}\right)x^3$$

déduite de (3), où l'on ferait

$$p^3 - q^3 = (p^2 + pq + q^2)(p - q)$$
$$= [(p+q)^2 - pq](p-q) = (1 - pq)(p - q) = p - q,$$

conduirait à des valeurs de p et q plus proches de 0,1 et 0,9 : il n'en est rien ; en utilisant cette formule pour $x = 1$, on trouve

$$q - p = 0{,}79203$$

d'où

$$p = 0{,}1040 \quad , \quad q = 0{,}8960.$$

Même en remplaçant

$$p^3 - q^3$$

par

$$0{,}1040^3 - 0{,}8960^3$$

dans la formule (10), et en calculant après cela p et q au moyen de cette formule, on trouve (ici $p^3 - q^3 = -0{,}71820$)

$$p - q = 0{,}79155, \qquad p = 0{,}1042, \qquad q = 0{,}8958.$$

Les nombres

$p = 0{,}1035$	pour 0,1000
$q = 0{,}8965$	pour 0,9000

obtenus en *première approximation* vont nous servir à calculer p, q de façon beaucoup plus précise.

24. Calcul de m.

Nous avons trouvé

$$mpq = 16{,}212$$
$$p = 0{,}1035$$
$$q = 0{,}8965$$

Il en résulte

$$m = \frac{16{,}212}{0{,}1035 \times 0{,}8965} = 174{,}72$$

Ce n'est aussi qu'une première approximation.

Nous allons fixer deux limites de m, en nous rappelant que m est le coefficient de groupement, que m définit le nombre de groupes de fréquences.

Nous partons de

valeur provisoire de $m = 175$,
» $p = 0{,}1035$
» $q = 0{,}8965$

Nous avons ici

$$mp = 18{,}36 \qquad mq = 156{,}64$$

Nous devons prendre pour mp *le plus grand entier de la forme* (1)

$$(m+1)p - r = 18{,}4635 - r \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 ;$$

ainsi, nous devons prendre

$$mp = 18, \qquad mq = 175 - 18 = 157 ;$$

bien entendu, ces deux expressions de mp, mq ne peuvent servir à préciser m, p, q.

Or, nous supposons donnés les nombres du Tableau I.

Multiplions-les par 100.

Les nombres extrêmes, correspondant à $x = 11$, $x = 10$, $x = 9$, ..., $x = -9$, $x = -10$, $x = -11$ sont

0,3245	auquel	correspond	0	fréquence	si l'on prend	0	pour 0,3245
0,5571	»	»	1	»	»	1	» 0,5571
0,9177	»	»	1	»	»	1	» 0,9177
0,6682	»	»	1	»	»	1	» 0,6682
0,3147	»	»	0	»	»	0	» 0,3147
0,1310	»	»	0	»	»	0	» 0,1310

Les nombres du Tableau I, multipliés par 100, donnent donc 20 groupes de fréquences, relatifs aux valeurs suivantes de x :

$$+10, +9, +8, +7, \ldots, +1, 0, -1, -2, \ldots, -9.$$

Nous sommes en présence de la loi de probabilité

$$\frac{175\,!}{(18-x)\,!\,(157+x)\,!}\,(0{,}1)^{18-x}\,(0{,}9)^{157+x}.$$

Nous observons de suite que

$$183 \times 0{,}1035 = 18{,}9405\,;$$

donc, si nous ne dépassons pas 183, nous devons prendre, pour 176, 177,..., 181 :

$$mp = 18$$

comme nous devons le faire si $m = 175$.

25. Nous nous posons alors cette question :

combien y a-t-il de groupes de fréquences dans le jeu

$$z_x = 100 \times \frac{175\,!}{(18-x)\,!\,(157+x)\,!}\,0{,}1^{18-x} \times 0{,}9^{157+x}\ ?$$

Ou plutôt : *ce jeu donne-t-il, comme il est nécessaire,*

0 fréquence pour $x = -11$,
1 fréquence au moins pour $x = -10$,
1 » » $x = +9$,
0 fréquence pour $x = +10$?

On a

$$z_{-10} = 100 \times \frac{175\,!}{28\,!\,147\,!} \times \frac{1}{10^{175}} \times 9^{147} = 0{,}4009$$

0,4009 étant moindre que 0,5, il y a 0 fréquence, il n'y a pas de fréquence pour $z = -10$; on a aussi

$$z_{10} = 100 \times \frac{175\,!}{8\,!\,167\,!} \times \frac{1}{10^{175}} \times 9^{167} = 0{,}4233 : \text{pas de fréquence.}$$

On peut dresser ainsi le tableau suivant, auquel nous adjoignons z_9.

Valeurs de m	z_{-10}	z_9	z_{10}
175	0,4009	$> 0{,}6682$	$< 0{,}4233$
176	0,4291	$> 0{,}6682$	$< 0{,}4233$
177	0,4587	$> 0{,}6682$	$< 0{,}4233$
178	0,4900	$> 0{,}6682$	$< 0{,}4233$
179	0,5228	$> 0{,}6682$	$< 0{,}4233$
180	$(100y_{-10} = 0{,}5571)$	$(100y_9 = 0{,}6682)$	$(100y_{10} = 0{,}3147)$
181	$> 0{,}5571$	0,6310	$< 0{,}3147$
182	$> 0{,}5571$	0,5979	$< 0{,}3147$
183	$> 0{,}5571$	0,5660	$< 0{,}3147$
184	$> 0{,}5571$	$< 0{,}5000$	$< 0{,}3147$

Pour $m = 179, 180, 181, 182, 183$, *et pour ces seules valeurs de* m, nous avons donc, en arrondissant les nombres z_{-10}, z_9, z_{10} à l'unité, les 20 groupes de fréquences nécessaires.

Ainsi,

$$179 \leqslant m \leqslant 183 \qquad \text{pour } m = 180.$$

Nous sommes donc plus approchés de la réalité que quand nous écrivions, au début, $m = 175$, ayant trouvé $m = 174{,}72$.

Étant donnée la manière dont ces limites 179, 183 ont été trouvées, il est *absolument naturel* de prendre la moyenne

$$m = \frac{179 + 183}{2} = 181 :$$

c'est cette moyenne qui donnera un jeu de fréquences calculées s'éloignant « probablement » le moins du jeu de fréquences théorique représentant le mieux la distribution de fréquences donnée par la statistique.

26. *Valeurs définitives de* p et q.

Revenons à la valeur trouvée pour *mpq :*

$$mpq = 16{,}212$$

et introduisons $m = 181$; on en déduit

$$pq = \frac{16{,}212}{181} = 0{,}089560.$$

En adjoignant $p + 1$, on trouve

$$p = 0{,}09945$$
$$q = 0{,}90055.$$

Mais ce ne sont pas encore les valeurs définitives de p, q.

En effet, si $m = 180$, on a $mp = 18$ — dans la formule (1) — non seulement pour $p = 0{,}1$ mais pour toutes les valeurs de p telles que

$$18{,}5 > mp > 17{,}5$$

$$\frac{18{,}5}{m} > p > \frac{17{,}5}{m}$$

$$\frac{18{,}5}{180} > p > \frac{17{,}5}{180}$$

(11) $$0{,}102772\cdots > p > 0{,}0972222\cdots$$

Pour toutes ces valeurs de p et pour $m = 180$, on trouvera les nombres du Tableau I.

Nous prenons $m = 181$ et

valeur provisoire de $p = 0{,}09945$;

allons-nous trouver pour p des limites voisines des limites (11) ?

Oui, car nous devons prendre *d'abord*

$$mp = 181 \times 0{,}09945 = 18{,}00045$$

donc

$$18{,}5 > mp > 17{,}5$$

$$\frac{18{,}5}{m} > p > \frac{17{,}5}{m}$$

$$\frac{18{,}5}{181} > p > \frac{17{,}5}{181}$$

(12) $$0{,}102209\cdots > p > 0{,}096683\cdots$$

Telle est, non pas la valeur définitive de p (il n'y a pas de valeur définitive de p) mais : *telles sont les limites définitives de* p.

Elles diffèrent extrêmement peu des limites « vraies » (11).

Les limites de p sont d'autant plus resserrées que m est plus grand, que la statistique contient un plus grand nombre de groupes.

Il y a donc intérêt à augmenter les nombres de groupes de la statistique ; s'il s'agit de degrés thermométriques p. e., il y a intérêt à grouper par demi-degrés, au lieu de grouper par degrés.

Les fondements analytiques de la Géodésie

par M. M. Alliaume (1)

Cette note a pour objet la systématisation mathématique des divers problèmes que l'on rencontre dans la détermination de la forme et de la grandeur de la Terre, et, par conséquent, l'analyse des diverses opérations géodésiques. L'étude du champ de la pesanteur, considéré comme invariable, permet la définition d'une surface mathématique de la Terre dont les paramètres sont indépendants du temps. Chaque opération géodésique consiste dans la détermination d'une ligne de visée, parmi l'infinité double de lignes de visée que peut réaliser l'instrument tel qu'il est installé ; cette ligne de visée particulière est connue en même temps que les deux nombres lus sur les cercles de l'instrument, et son allure est, dès lors, imposée par les caractéristiques de l'atmosphère à l'instant de l'observation. En particulier, dans les opérations du nivellement géométrique, la congruence des lignes de visée associées à l'instrument se réduit à une surface, et les relations entre les altitudes géométriques des points visés sont celles qui expriment l'existence de ces points dans une même surface de lignes de visée. Les altitudes géométriques ainsi obtenues doivent se transformer dans les expressions, plus efficaces, définies sous le nom d'altitudes dynamiques. Quant au calcul des paramètres dont la connaissance équivaut, par hypothèse, à celle de la surface mathématique de la Terre, il résulte de l'application de la théorie des erreurs à un système d'équations dont les coefficients se tirent d'opérations géodésiques convenablement organisées. L'approximation des valeurs finales adoptées comme les plus plausibles, dans la résolution de ce système d'équations surabondantes, est nécessairement d'autant meilleure que l'équation de la surface mathématique de la Terre a été écrite, à priori, au moyen de paramètres plus nombreux. Aussi y a-t-il lieu de substituer à la surface mathématique de la Terre, pratiquement inabordable à l'analyse, une surface qui ne soit qu'une surface de référence, appartenant à une famille déterminée de surfaces, ne comportant qu'un petit nombre de paramètres, et dont la définition se complète, après discussion, par des

(1) Société Scientifique de Bruxelles, *Volume jubilaire* (1926).

conditions qui la rendent aussi avantageuse que possible dans l'exploration géodésique d'une région plus ou moins étendue du globe. C'est à cette surface de référence qu'est rapporté l'examen local de la surface mathématique de la Terre, par la comparaison, en chaque point, de la verticale et de la normale à la surface de référence. A ces déviations de la verticale dans une région terrestre correspondent des conditions imposées à la distribution des masses au voisinage de la surface du sol dans cette région, d'où un commencement de collaboration de la Géodésie et de la Géologie.

Cette étude des fondements analytiques de la Géodésie s'inspire d'une réflexion de Pasteur qu'on a un peu condensée en faisant dire au célèbre biologiste : « Il n'y a pas de science appliquée ; il n'y a que des applications de la science ».

I. — Surfaces de niveau, géoïde

1. Les équations des surfaces équipotentielles du champ de la pesanteur, ou surfaces de niveau, par rapport à des axes de repère xyz ou $\xi\eta\zeta$ liés à la Terre, sont de la forme

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = c.$$

En toute rigueur, l'accélération due à la pesanteur dépend, en chaque point, en grandeur et direction, de la configuration des astres par rapport à la Terre, et l'équation générale des surfaces équipotentielles s'écrit au moyen du temps. Mais celui-ci n'entre que dans des termes considérés comme négligeables par la Géodésie.

De la forme de l'équation générale des surfaces équipotentielles, il résulte qu'un même point ne peut pas appartenir à deux surfaces équipotentielles distinctes.

Parmi les surfaces équipotentielles, le géoïde est celle qui est définie par son passage en un point (ξ_0, η_0, ζ_0) c'est-à-dire par une valeur particulière c_0 du paramètre c :

$$\varphi(x, y, z) = c_0$$

où

$$c_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0).$$

Moyennant des coordonnées curvilignes (u, v), les équations paramétriques de cette surfaces s'écrivent

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) ; \end{aligned}$$

l'élimination de (u, v) entre ces trois équations reconstitue l'équation cartésienne du géoïde, et les fonctions des seconds membres satisfont aux conditions habituelles de la représentation paramétrique.

Pour paramètres (u, v) nous adopterons les coordonnées polaires de la verticale au point (x, y, z) du géoïde (dirigée vers l'extérieur de celui-ci), perpendiculaire au géoïde en ce point. Les axes de coordonnées étant rectangulaires, les fonctions (x, y, z) convenables pour qu'il en soit ainsi satisfont à l'équation du géoïde et aux équations

$$\cos u \cos v : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sin u \cos v : \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin v : \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

2. Sur le géoïde, définissons par son équation générale

$$\theta(u, v, p, q) = 0$$

une famille de lignes à deux paramètres p et q (telles que les géodésiques). Eu égard à deux points quelconques (u_1, v_1) et (u_2, v_2) du géoïde, l'élimination de (p, q) entre les équations

$$\begin{aligned} \theta(u, v, p, q) &= 0, \\ \theta(u_1, v_1, p, q) &= 0, \\ \theta(u_2, v_2, p, q) &= 0 \end{aligned}$$

laisse l'équation

$$\theta_{12}(u, v) = 0$$

de la courbe θ passant par ces deux points.

La longueur de l'arc que ces points limitent est

$$\int_{u_1, v_1}^{u_2, v_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E + 2Fr + Gr^2}\, du$$

où

$$r = -\frac{\partial \theta_{12}}{\partial u} : \frac{\partial \theta_{12}}{\partial v}$$

et où E, F, G sont des fonctions convenables de (u, v) dans lesquelles, ainsi que dans r, v a été exprimé au moyen de u par l'équation $\theta_{12}(u, v) = 0$.

De même, eu égard à un point quelconque (u_o, v_o) du géoïde, et à une direction $r_o = \left(\frac{dv}{du}\right)_o$ en ce point, l'élimination de (p, q) entre les équations

$$\begin{aligned} \theta(u, v, p, q) &= 0, \\ \theta(u_o, v_o, p, q) &= 0, \\ \frac{\partial \theta(u_o, v_o, p, q)}{\partial u} + r_o \frac{\partial \theta(u_o, v_o, p, q)}{dv} &= 0 \end{aligned}$$

laisse l'équation de la courbe de la famille θ passant par ce point et ayant, en ce point, cette orientation :

$$\theta_o(u, v) = 0.$$

Le long d'une pareille ligne, le point dont la distance au point (u_o, v_o) est égale à une longueur connue s est celui dont les coordonnées satisfont aux équations

$$\theta_o(u, v) = 0,$$

$$s = \int_{u_o}^{u} \sqrt{E + 2Fr + Gr^2}\, du,$$

où

$$r = -\frac{\partial \theta_o}{\partial u} : \frac{\partial \theta_o}{\partial v},$$

et v ayant été, dans les fonctions E, F, G de (u, v), ainsi que dans r, éliminé au profit de u, par l'équation $\theta_o(u, v) = 0$.

Si, dans l'une comme dans l'autre de ces déterminations d'une ligne θ_{12} ou θ_o dans la famille des courbes θ du géoïde, l'élimination des paramètres (p, q) devait fournir plusieurs lignes répondant aux conditions énoncées, des restrictions convenables apportées à la définition des courbes θ réduiraient aisément à une le nombre de ces lignes.

3. Considérons trois points du géoïde (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3). Leurs associations deux à deux définissent trois lignes θ ou, si l'on veut, un triangle tracé sur le géoïde au moyen de lignes de la famille θ.

Connaissant les coordonnées (u_1, v_1), (u_2, v_2) de deux sommets de ce triangle et les orientations $r_1 = \left(\frac{dv}{du}\right)_1$, $r_2 = \left(\frac{dv}{du}\right)_2$ des côtés qui, issus de ces deux premiers sommets, passent par le troisième, on peut calculer les coordonnées (u_3, v_3) de ce troisième sommet. Elles satisfont aux deux équations que laisse l'élimination de (p_1, q_1), (p_2, q_2) entre les six équations

$$\theta(u_1, v_1, p_1, q_1) = 0,$$
$$\theta(u_3, v_3, p_1, q_1) = 0,$$
$$\theta(u_2, v_2, p_2, q_2) = 0,$$
$$\theta(u_3, v_3, p_2, q_2) = 0,$$
$$\frac{\partial \theta(u_1, v_1, p_1, q_1)}{\partial u} + r_1 \frac{\partial \theta(u_1, v_1, p_1, q_1)}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial \theta(u_2, v_2, p_2, q_2)}{\partial u} + r_2 \frac{\partial \theta(u_2, v_2, p_2, q_2)}{\partial v} = 0.$$

La résolution d'un ensemble de semblables problèmes constituerait une trigonométrie des lignes θ sur la surface (x, y, z).

4. A tout point (ξ, η, ζ) correspond la perpendiculaire, en ce point, à la surface équipotentielle passant par ce point : c'est la verticale en celui-ci. Il existe une infinité triple, un complexe de verticales, et les lignes de force du champ de la pesanteur constituent une famille à deux paramètres.

Si ceux-ci sont (a, b), les équations générales des lignes de force sont de la forme

$$\chi_1(\xi, \eta, \zeta, a, b) = 0,$$
$$\chi_2(\xi, \eta, \zeta, a, b) = 0,$$

et obtenues par intégration des deux équations différentielles du premier ordre

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi / \partial \xi} = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi / \partial \eta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi / \partial \zeta}$$

moyennant l'introduction des deux constantes arbitraires (a, b).

L'approximation à laquelle le complexe des verticales se réduit à une congruence (telle que l'ensemble des normales au géoïde) équivaut à l'hypothèse que les lignes de force sont des droites. A cette approximation toute perpendiculaire au géoïde rencontre normalement toute surface de niveau.

Les équations de la ligne de force passant par un point (ξ_o, η_o, ζ_o) résultent de l'élimination de (a, b) entre les égalités

$$\chi_1(\xi, \eta, \zeta, a, b) = 0,$$
$$\chi_2(\xi, \eta, \zeta, a, b) = 0,$$
$$\chi_1(\xi_o, \eta_o, \zeta_o, a, b) = 0,$$
$$\chi_2(\xi_o, \eta_o, \zeta_o, a, b) = 0.$$

La projection géoïdale d'un point est l'intersection du géoïde et de la ligne de force passant par ce point. Les circonstances de la pratique ne laissent pas place à l'ambiguïté que pourrait comporter cette définition.

Les coordonnées (u, v) de la projection géoïdale d'un point (ξ_o, η_o, ζ_o) se tireront des deux équations que laisse l'élimination de (ξ, η, ζ, a, b) entre les quatre égalités précédentes et les trois suivantes :

$$\xi = x(u, v),$$
$$\eta = y(u, v),$$
$$\zeta = z(u, v).$$

Les équations de la ligne de force passant par le point (u, v) du géoïde résultent de l'élimination de (x, y, z, a, b) entre les équations

$$\chi_1(\xi, \eta, \zeta, a, b) = 0,$$
$$\chi_2(\xi, \eta, \zeta, a, b) = 0,$$
$$\chi_1(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\chi_2(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v),$$
$$z = z(u, v);$$

écrivons-les

$$\chi_1 [\, \xi, \eta, \zeta, u, v \,] = 0,$$
$$\chi_2 [\, \xi, \eta, \zeta, u, v \,] = 0,$$

ou, moyennant un paramètre τ,

$$\xi = \xi [\, \tau, u, v \,],$$
$$\eta = \eta [\, \tau, u, v \,],$$
$$\zeta = \zeta [\, \tau, u, v \,].$$

5. L'altitude (géométrique) d'un point est sa distance à sa projection géoïdale, le long de la ligne de force à laquelle il appartient (suivie de l'intérieur à l'extérieur du géoïde). A l'approximation pour laquelle les lignes de force sont rectilignes, toute normale au géoïde est rencontrée par celui-ci et une surface de niveau quelconque en deux points dont la distance est constante, et l'altitude (géométrique) est la même en tous les points d'une même surface de niveau.

Eu égard aux équations paramétriques ci-dessus de la ligne de force passant par la projection géoïdale (u, v), l'altitude a du point (ξ, η, ζ) de cette ligne de force est

$$a = \int_{\tau_o}^{\tau} \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2}\, d\tau\,,$$

où τ se tire de l'équation que laisse l'élimination de (u, v) entre les égalités

$$\xi = \xi [\tau, u, v],$$
$$\eta = \eta [\tau, u, v],$$
$$\zeta = \zeta [\tau, u, v],$$

et où τ_o, valeur de τ dans le géoïde, se tire de l'équation que laisse l'élimination des mêmes coordonnées entre les égalités

$$x (u, v) = \xi [\, \tau_o, u, v],$$
$$y (u, v) = \eta [\, \tau_o, u, v],$$
$$z (u, v) = \zeta [\, \tau_o, u, v].$$

Inversement, les équations paramétriques de la ligne de force passant par le point (u, v) du géoïde, écrites au moyen du paramètre a, s'obtiendront par élimination de (τ_o, τ, u, v) entre les équations paramétriques en τ, les trois égalités précédentes et la relation

$$a = \int_{\tau_o}^{\tau} \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2}\, d\tau\,;$$

nous les écrirons

$$\xi = \xi(a, u, v),$$
$$\eta = \eta(a, u, v),$$
$$\zeta = \zeta(a, u, v).$$

Identiquement

$$x(u, v) = \xi(0, u, v),$$
$$y(u, v) = \eta(0, u, v),$$
$$z(u, v) = \zeta(0, u, v);$$

(a, u, v) sont les coordonnées géodésiques du point dont les coordonnées cartésiennes sont (ξ, η, ζ).

Un point peut aussi être défini par son altitude a et les coordonnées polaires (u_o, v_o) de sa verticale : les coordonnées (u, v) de la projection géoïdale se tirent des deux équations

$$\frac{\partial\xi(a, u, v)/\partial a}{\cos u_o \cos v_o} = \frac{\partial\eta(a, u, v)/\partial a}{\sin u_o \cos v_o} = \frac{\zeta(a, u, v)/\partial a}{\sin v_o}.$$

6. La distance s, le long d'une ligne géoïdale θ, entre les projections géoïdales de deux points donnés (ξ_1, η_1, ζ_1), $(\xi_2, \eta_2 \zeta_2)$, résulte de l'élimination de $(a_1, u_1, v_1, a_2, u_2, v_2, p, q, v, dv)$ entre les équations

$$\xi(a_1, u_1, v_1) = \xi_1, \qquad \xi(a_2, u_2, v_2) = \xi_2,$$
$$\eta(a_1, u_1, v_1) = \eta_1, \qquad \eta(a_2, u_2, v_2) = \eta_2,$$
$$\zeta(a_1, u_1, v_1) = \zeta_1, \qquad \zeta(a_2, u_2, v_2) = \zeta_2,$$
$$\theta(u, v, p, q) = 0,$$
$$\theta(u_1, v_1, p, q) = 0,$$
$$\theta(u_2, v_2, p, q) = 0,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial u}\, du + \frac{\partial\theta}{\partial v}\, dv = 0,$$

$$s = \int_{u_1, v_1}^{u_2, v_2} \sqrt{E\, du^2 + 2F\, du dv + G\, dv^2}.$$

II. — Observations géodésiques

7. L'atmosphère est un milieu transparent, isotrope, non homogène. Ses propriétés optiques en chacun de ses points (ξ, η, ζ) sont définies par son indice de réfraction μ, fonction de (ξ, η, ζ) inversement proportionnelle à la vitesse de la lumière, dans une direction quelconque, au point déterminé par ces coordonnées, et qui s'écrit au moyen des valeurs numériques attribuées à divers paramètres. Le rayon lumineux passant par deux points P_1 (ξ_1, η_1, ζ_1) et P_2 (ξ_2, η_2, ζ_2) appartient à la ligne le long de laquelle les coordonnées (ξ, η, ζ) satisfont à la condition que l'intégrale

$$\int_P^{P_2} \mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\sigma,$$

dans laquelle

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$$

est maximum ou minimum. Les équations différentielles (du second ordre) de la famille de lignes (à quatre paramètres) à laquelle appartient ce rayon lumineux s'obtiennent en exprimant que

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\sigma = 0.$$

Ces équations différentielles sont

$$\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\, d\sigma - d\left(\mu \frac{d\xi}{d\sigma}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\, d\sigma - d\left(\mu \frac{d\eta}{d\sigma}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}\, d\sigma - d\left(\mu \frac{d\zeta}{d\sigma}\right) = 0,$$

dont deux seulement sont distinctes. Dans cette infinité quadruple de rayons lumineux, le passage par les points P_1 et P_2 définit généralement un rayon déterminé, par le calcul des quatre constantes qu'introduit l'intégration de ces équations. De même, dans la quadruple infinité de rayons lumineux, un rayon déterminé est défini par son passage en un point et la condition qu'il admette en ce point une tangente dont les coordonnées polaires sont imposées.

8. La position d'un instrument visuel est définie par les coordonnées (ξ_0, η_0, ζ_0) d'un point qui en est solidaire, et appelé centre de l'instrument. L'instrument visuel géodésique le plus général est la réalisation matérielle d'un système de coordonnées horizontales ; l'un de ses axes de rotation, le pivot, est théoriquement vertical, et le plan défini par ce pivot et une direction déterminée, qui en est solidaire et est issue du centre, a une orientation théoriquement déterminée par une certaine fonction de (ξ_0, η_0, ζ_0). A chaque configuration de l'instrument installé au point (ξ_0, η_0, ζ_0) correspondent des lectures L et l sur les cercles gradués, en même temps qu'une certaine ligne, dite ligne de visée, solidaire de l'instrument dans cette installation et cette configuration. Les lectures L et l sont théoriquement les coordonnées polaires horizontales de la tangente à la ligne de visée, en un point déterminé de celle-ci. Dans la réalité, ces coordonnées polaires instrumentales sont seulement des fonctions de ces lectures, et ces fonctions s'écrivent au moyen de paramètres qui mesurent les erreurs de construction, de réglage et d'installation de l'instrument. La théorie de l'instrument géodésique employé a pour objet l'établissement

de ces fonctions. L'étude expérimentale de l'instrument réglé et installé a pour objet l'acquisition des valeurs numériques de ces paramètres en ce qui concerne les erreurs qui ne peuvent pas être considérées comme négligeables.

Dans l'infinité double de lignes de visée qui peuvent correspondre aux diverses configurations de l'instrument géodésique visuel le plus général installé en (ξ_o, η_o, ζ_o), la ligne de visée définie par une configuration (L, l) de cet instrument a pour équations celles d'un rayon lumineux dont les quatre constantes d'installation ont été définies au moyen des cinq quantités $(\xi_o, \eta_o, \zeta_o, L, l)$ caractéristiques de cette installation et de cette configuration :

$$f_1(\xi, \eta, \zeta, \xi_o, \eta_o, \zeta_o, L, l) = 0,$$
$$f_2(\xi, \eta, \zeta, \xi_o, \eta_o, \zeta_o, L, l) = 0.$$

L'orientation de l'instrument installé en (ξ_o, η_o, ζ_o) est généralement définie par la condition qu'à la ligne de visée passant par un point donné (ξ_1, η_1, ζ_1) corresponde une lecture donnée L_1 sur le cercle horizontal. Ceci est exprimé par la condition que laisse l'élimination de l entre les deux égalités

$$f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_o, \eta_o, \zeta_o, L_1, l) = 0,$$
$$f_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_o, \eta_o, \zeta_o, L_1, l) = 0.$$

III. — **Nivellement**

9. C'est par les opérations dites de nivellement (géométrique) que se déterminent les altitudes (géométriques). Dans pareille opération il y a un point dont les coordonnées géodésiques (u_1, v_1, a_1) sont connues, et un point (u_2, v_2, a_2) dont les deux premières coordonnées géodésiques seules sont connues. Il y a aussi un point (u_o, v_o, a_o), point de station, où l'on installe un instrument (niveau) dont le centre à une altitude $(a_o + m_o)$. Une mire est située verticalement au point (u_1, v_1, a_1), et de même une mire en (u_2, v_2, a_2).

Les lignes de visée de l'instrument correspondent (moyennant un réglage convenable) à des lectures nulles sur le cercle vertical de l'instrument géodésique le plus général :

$$f_1[\xi, \eta, \zeta, u_o, v_o, a_o + m_o, L, 0] = 0,$$
$$f_2[\xi, \eta, \zeta, u_o, v_o, a_o + m_o, L, 0] = 0,$$

et la surface lieu des lignes de visée est celle dont l'équation résulte de l'élimination de L entre ces deux équations :

$$\psi[\xi, \eta, \zeta, u_o, v_o, a_o + m] = 0.$$

Eu égard aux équations paramétriques d'une ligne de force,

$$\xi = \xi(a, u, v),$$
$$\eta = \eta(a, u, v),$$
$$\zeta = \zeta(a, u, v),$$

les deux points d'intersection de la surface de visée avec les lignes de force des points qui portent les mires ont les coordonnées

$$\xi_1 = \xi(a_1 + m_1, u_1, v_1), \qquad \xi_2 = \xi(a_2 + m_2, u_2, v_2),$$
$$\eta_1 = \eta(a_1 + m_1, u_1, v_1), \qquad \eta_2 = \eta(a_2 + m_2, u_2, v_2),$$
$$\zeta_1 = \zeta(a_1 + m_1, u_1, v_1), \qquad \zeta_2 = \zeta(a_2 + m_2, u_2, v_2),$$

où m_1 et m_2 sont les excès des altitudes des points visés des mires sur les altitudes des pieds de celles-ci : ce sont les lectures sur les mires.

Ces deux points appartiennent à la surface de visée :

$$\psi[u_1, v_1, a_1 + m_1, u_o, v_o, a_o + m_o] = 0,$$
$$\psi[u_2, v_2, a_2 + m_2, u_o, v_o, a_o + m_o] = 0.$$

Enfin, l'élimination de l'altitude $(a_o + m_o)$, inconnue et sans intérêt, entre ces deux équations laisse

$$F(u_o, v_o, u_1, v_1, u_2, v_2, a_1 + m_1, a_2 + m_2) = 0,$$

égalité par laquelle, connaissant l'altitude a_1 d'un point visé, on peut calculer l'altitude a_2 de l'autre.

10. Les équations paramétriques d'une ligne de force en fonction de l'altitude (géométrique) d'un quelconque de ses points constituent les équations de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées géodésiques (géométriques). Le point (ξ, η, ζ) peut aussi être défini par les coordonnées (u, v) de sa projection géoïdale et par le potentiel A d'un kilogramme-masse dans la surface de niveau à laquelle il appartient, calculé de manière que ce potentiel soit nul dans le géoïde. Ce sont les coordonnées dynamiques de ce point, dont la troisième, A, est l'altitude dynamique de celui-ci.

L'équation d'une surface de niveau peut s'écrire de façon que la valeur numérique du paramètre qui lui est propre soit celle du potentiel A qui la définit :

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = A.$$

Joignant cette équation aux équations paramétriques en a de la ligne de force (u, v), on obtient un système de quatre équations en $(\xi, \eta, \zeta, u, v, a, A)$. La résolution de ce système par rapport à ξ, η, ζ et a donne :

1°) les équations de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées dynamiques,

$$\xi = \Xi(A, u, v),$$
$$\eta = H(A, u, v),$$
$$\zeta = Z(A, u, v),$$

équations paramétriques de la ligne de force (u, v) moyennant le paramètre A, de sorte que, identiquement,

$$\xi(0, u, v) = \Xi(0, u, v),$$
$$\eta(0, u, v) = H(0, u, v),$$
$$\zeta(0, u, v) = Z(0, u, v);$$

2°) l'expression de a en fonction de (u, v, A), d'où, inversement, celle de A en fonction de (u, v, a).

La différence

$$A(u, v, a) - a$$

est, en (u, v), la correction dynamique de l'altitude géométrique a le long de la ligne de force (u, v).

IV. — Forme et grandeur du géoïde

11. La résolution des problèmes précédents suppose connue, en particulier, l'équation du géoïde, avec les valeurs numériques des coefficients au moyen desquels s'écrit cette équation. Lorsqu'elle aborde la recherche de cette équation, la Géodésie fait l'hypothèse que le géoïde appartient à une famille déterminée de surfaces, parmi lesquelles une surface particulière est définie par les valeurs numériques attribuées à n coefficients indépendants $(c_1, c_2, \ldots c_n)$. Ainsi, les équations paramétriques du géoïde (moyennant, comme paramètres u, v, les coordonnées polaires de la normale à celui-ci) sont censées avoir des formes connues,

$$x = x(u, v, c_1, c_2, \ldots c_n),$$
$$y = y(u, v, c_1, c_2, \ldots c_n),$$
$$z = z(u, v, c_1, c_2, \ldots c_n),$$

et il reste à établir les valeurs des paramètres $c_1, c_2, \ldots c_n$ propres au géoïde.

La distance s, le long d'une ligne

$$f(u, v) = 0$$

du géoïde, de l'un à l'autre de deux points (u_1, v_1), (u_2, v_2), est

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E + 2Fr + Gr^2}\, du,$$

avec les significations connues de E, F, G, r. Elle ne dépend que des coordonnées u_1, u_2, de la forme de la fonction f, des coefficients de cette fonction, et des paramètres inconnus c_1, c_2, ... c_n de l'équation du géoïde.

Si (s, u_1, u_2) ont été mesurés, l'opération effectuée le long de la ligne déterminée f fournit une équation entre ces paramètres inconnus. De pareilles équations, le long de diverses lignes f du géoïde, en nombre au moins égal à n, permettent d'écrire un système d'au moins n équations à n inconnues c. Les valeurs les plus avantageuses de ces paramètres c s'obtiendront par la résolution de ce système au moyen de l'une des méthodes de la théorie des erreurs.

Pour que l'influence relative des erreurs inévitables d'observation soit aussi petite que possible, il faut que, dans chaque opération, s soit aussi grand que possible. Pareille mesure étendue ne peut être effectuée directement, comme elle le serait par application de barres ou de fils le long de la ligne f qui aurait été atteinte sur le géoïde (généralement par une tranchée dans le sol, — sans même qu'il faille invoquer la modification qu'apporterait au géoïde le creusement de cette tranchée).

Le procédé indirect consiste à calculer, d'une autre façon que ce qu'indique le second membre, le premier membre de l'égalité précédente. Le résultat de ce calcul s'écrira au moyen des nombres obtenus dans diverses observations et, en principe, des paramètres inconnus c. A chaque groupe d'opérations relatives à une ligne f du géoïde correspondra encore une relation entre ces paramètres.

12. Pour systématiser les notations, nous remplaçons u_2 par u_{p+1}, et nous partageons la ligne f, de u_1 à u_{p+1}, en p segments dont les origines ont des premières coordonnées curvilignes u_1, u_2, ... u_p. Si s_i est la longueur du i^{me} segment, l'égalité précédente s'écrit

$$\sum_{i=1}^{p} s_i = \int_{u_1}^{u_{p+1}} \sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r + \mathrm{G}r^2}\, du.$$

Tandis que, pour une ligne f déterminée, le deuxième membre de cette équation s'écrit, en fonction des paramètres inconnus c, au moyen des résultats d'observations astronomiques fournissant les coordonnées des points extrêmes, les termes du premier membre vont se calculer de proche en proche, généralement aussi en fonction des paramètres c, mais au moyen des résultats d'observations astronomiques ne donnant les coordonnées que d'un seul point, et au moyen du résultat d'une mesure directe de longueur. L'ensemble de ces opérations constitue une triangulation.

De part et d'autre de la ligne f, et observables l'un de l'autre trois à trois, des points ont été préparés, dans le voisinage de la surface du sol, pour être mis en coïncidence avec le centre de l'instrument géodésique. D'une part, des opérations de nivellement ont fait connaître les altitudes

(géométriques) de tous ces points. D'autre part, des observations astronomiques ont déterminé les coordonnées polaires de la tangente à la ligne de force en l'un d'eux, et, par conséquent, les coordonnées (u, v) de la projection géoïdale de celui-ci.

Il est bien entendu que ces calculs d'altitudes et de coordonnées (u, v), mettant en œuvre des résultats d'opérations géodésiques et d'observations astronomiques, ne peuvent s'effectuer jusqu'au bout, numériquement, que si l'on possède les valeurs numériques des paramètres caractéristiques du géoïde et dont la détermination fait précisément l'objet des recherches actuelles. Ainsi, les résultats des calculs définis ci-dessus ne sont, en principe, que des fonctions de ces paramètres inconnus. Il en sera de même des résultats des calculs qui seront encore définis ci-dessous.

Les opérations vont se poursuivre par la mesure de la distance de deux points du géoïde correspondant à deux des points de station au voisinage du sol : il faut définir cette correspondance, et le long de quelle ligne du géoïde se fera cette mesure.

Une visée de la première station sur un signal placé en la deuxième définit une ligne de l'espace et la surface lieu des lignes de force passant par les divers points de cette ligne de visée. On considère les intersections de cette surface lieu des lignes de force avec le géoïde et avec une surface de niveau dont le potentiel est connu, et qui, par un choix convenable du site, est accessible sur toute sa longueur. Au moyen de règles ou de fils on mesure directement cette dernière ligne, et on en déduit, par le calcul, la longueur de la ligne du géoïde, base de la triangulation, appartenant à la même nappe de lignes de forces. Enfin, à partir des coordonnées curvilignes, déjà obtenues, de la projection géoïdale de la première station, et eu égard à la longueur de la base, on calcule les coordonnées curvilignes de la deuxième extrémité de cette base, d'où les coordonnées cartésiennes de la deuxième station.

Lorsque les coordonnées (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ'') de deux points de station sont connues, deux observations permettent le calcul des coordonnées (ξ, η, ζ) de tout point visible des deux premiers. Le centre de l'instrument prend successivement les deux positions (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ''), et, dans chacune de celles-ci, après orientation du cercle horizontal par une visée sur l'autre, l'instrument reçoit une configuration telle que les deux lignes de visée correspondantes passent par le même point (ξ, η, ζ). Soient (L', l'), (L'', l'') les lectures définissant respectivement ces deux configurations ; les équations des lignes de visée sont

$$\begin{cases} f_1(\xi, \eta, \zeta, \ \xi', \eta', \zeta', \ L', l') = 0, \\ f_2(\xi, \eta, \zeta, \ \xi', \eta', \zeta', \ L', l') = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(\xi, \eta, \zeta, \ \xi'', \eta'', \zeta'', \ L'', l'') = 0, \\ f_2(\xi, \eta, \zeta, \ \xi'', \eta'', \zeta'', \ L'', l'') = 0, \end{cases}$$

et ceci constitue un système d'équations surabondantes aux trois inconnues (ξ, η, ζ). L'application de l'une des méthodes de la théorie des erreurs à la résolution de ce système fournira les valeurs les plus avantageuses des coordonnées (u, v) de la projection géoïdale du point visé.

De proche en proche, ces opérations et ces calculs fournissent les coordonnées (ξ, η, ζ) de tous les points préparés dans le voisinage du sol, de part et d'autre de la ligne f du géoïde, et par conséquent, en principe au moyen des paramètres inconnus caractéristiques du géoïde, les coordonnées curvilignes des projections géoïdales de ces points.

13. Définissons une famille de lignes géoïdales à deux paramètres :

$$\theta(u, v, p, q) = 0 ;$$

cette famille peut être choisie de façon que la ligne f lui appartienne. Associons convenablement deux à deux les points du géoïde distribués de part et d'autre de la ligne f, projections géoïdales des points de station de l'instrument, et déterminons les lignes θ renfermant ces couples de points. Dans leur ordre le long de la ligne f, de l'extrémité u_1 à l'extrémité u_{p+1} du segment étudié de cette ligne, numérotons de 2 à p les points d'intersection de celle-ci avec ces diverses lignes θ, et soit u_i la coordonnée curviligne indépendante du point numéroté i. Deux points consécutifs, i et $i+1$, définissent une ligne $\theta_{i,i+1}$ dont la longueur de l'un à l'autre de ces points est

$$\sigma_i = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \sqrt{E_\theta + 2F_\theta r + G_\theta r^2} \cdot du$$

où E_θ, F_θ, G_θ sont les fonctions habituelles E, F, G de (u, v) desquelles v a été éliminé au profit de u par l'équation

$$\theta_{i,i+1}(u, v) = 0,$$

et où

$$r = -\frac{\partial \theta_{i,i+1}}{\partial u} : \frac{\partial \theta_{i,i+1}}{\partial v}$$

après la même élimination.

Le segment correspondant de la ligne f est

$$s_i = \sigma_i + \epsilon_i$$

où, pour un choix déterminé de la famille θ, ϵ_i est d'autant plus voisin de zéro que les points i et $i+1$ sont plus voisins. Ainsi, moyennant une erreur $\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i$, nous connaissons le premier membre de l'équation

$$s \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{p} s_i = \int_{u_1}^{u_{p+1}} \sqrt{E + 2Fr + Gr^2}\, du$$

déjà écrite. Ce premier membre est une fonction des coordonnées, connues astronomiquement, de l'un des points de station, de la longueur de la base mesurée, des altitudes des points de station, des lectures instrumentales et, en principe, des paramètres inconnus du géoïde. Quant à l'erreur $\Sigma\epsilon_i$, elle sera aussi petite que l'on voudra, non par un fractionnement de plus en plus grand du segment étudié de f, qui multiplierait les termes de cette somme, mais par un choix convenable de la ligne f et de la famille θ, au point que cette erreur serait nulle si la ligne f appartenait à la famille θ.

L'équation ci-dessus, après toutes les opérations et calculs de la triangulation, est une équation entre les n paramètres inconnus du géoïde. De pareilles opérations, en nombre au moins égal au nombre de ces paramètres, permettent le calcul de ceux-ci.

14. Dans la pratique, on connaît des valeurs approchées de ces paramètres, et le problème consiste dans la recherche des corrections de deuxième approximation. Si le géoïde était sphérique, les calculs de mise en œuvre des observations pour l'obtention des divers termes du premier membre de l'équation fondamentale, se trouveraient extrêmement simplifiés. Pour un géoïde quasi sphérique, chacun de ces termes est d'une forme telle que, dans le passage du géoïde sphérique au géoïde quasi sphérique, pour des variations relatives des paramètres considérées comme petites du premier ordre, il ne subit qu'une variation petite du deuxième ordre. Aussi tous les calculs conduisant aux divers termes du premier membre peuvent-ils, dans la pratique, se calculer jusqu'au bout, numériquement, comme ils le seraient pour un géoïde sphérique, et moyennant une valeur approchée du rayon de celui-ci. Finalement, à cette approximation, le premier membre de l'équation fondamentale, longueur de l'arc mesuré sur le géoïde, est entièrement numérique, et ce n'est que dans le second membre que se rencontrent encore les paramètres inconnus.

V. -- Ellipsoïde de référence et déviations de la verticale

15. Pendant longtemps on a attaché une grande importance aux calculs précédents et c'est eux qui constituaient le seul mode de résolution du problème essentiel de la Géodésie. En réalité, ce problème, loin d'être essentiel, est, dès son énoncé, presque illusoire. Le géoïde est trop éloigné d'être un ellipsoïde de révolution, ou toute surface dont la définition géométrique soit suffisamment simple, pour qu'il soit possible d'attribuer aux paramètres d'une pareille surface des valeurs numériques qui soient satisfaisantes dans l'exploration géodésique d'une région de médiocre étendue prise indifféremment en toute partie de la Terre. Il faut aban-

donner la notion d'un géoïde ellipsoïdal, valable pour toute la surface terrestre, et renoncer, en particulier, à attribuer des valeurs numériques au grand axe et à l'excentricité d'un pareil géoïde. Dans l'exploration géodésique d'une région, on ne peut que définir une surface de repère liée à la Terre, calculer les paramètres de cette surface, et étudier, par rapport à celle-ci, et indépendamment l'un de l'autre, des points suffisamment nombreux de la surface géographique dont on s'est proposé l'exploration.

En principe, le choix de cette surface de référence est, en forme, en grandeur et en situation, entièrement arbitraire. On pourrait, en vue de la simplicité, adopter le plan horizontal d'un point déterminé de la surface terrestre. Que ce soit, généralement, une surface à n paramètres, parmi lesquels certains paramètres pourront définir la situation de cette surface ou compléter la détermination de cette situation. Par rapport à des axes rectangulaires dont l'orientation seule soit imposée, à savoir de façon que les coordonnées polaires d'une verticale dirigée vers le zénith soient la longitude et la latitude de celle-ci, et dont la détermination complète résulte, par conséquent, des coordonnées rectilignes arbitrairement attribuées à un point terrestre quelconque, les coordonnées rectilignes d'un point de longitude u et de latitude v sont

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h \cos u \cos v, \\ y &= y(u, v, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h \sin u \cos v, \\ z &= z(u, v, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h \sin v, \end{aligned}$$

écrites au moyen de l'altitude h dans l'hypothèse de l'approximation géodésique pour laquelle les lignes de force du champ de la pesanteur sont assimilables à des droites dans la couche explorée de ce champ. La définition de la surface de référence se complétera par n conditions simples.

On pourra demander que n points, dont les coordonnées (x_i, y_i, z_i) sont connues, aient telles altitudes h_i. Ces coordonnées auront été déterminées par des opérations de triangulation, y compris la mesure d'au moins une base, étendues à toute la région dont on veut faire l'étude géodésique, et organisées indépendamment de toute mesure d'arc de courbe géoïdale. Les altitudes h_i sont, en principe, arbitraires : pour rendre plus utile le choix de la surface de référence correspondante, on aura considéré, par exemple, des points voisins de la côte, et on aura défini leurs altitudes d'après l'observation suffisamment prolongée du niveau de la mer. Les valeurs demandées des paramètres $c_1, c_2, \ldots c_n$ se tireront alors du système de n équations qu'aura laissé l'élimination des $2n$ inconnues (u'_i, v'_i) entre les $3n$ équations

$$\begin{aligned} x_i &= x(u'_i, v'_1, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h_i \cos u'_i \cos v'_i, \\ y_i &= y(u'_i, v'_i, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h_i \sin u'_i \cos v'_i, \\ z_i &= z(u'_i, v'_i, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h_i \sin v'_i. \end{aligned}$$

16. Cette détermination de la surface de référence est indépendante de toute observation astronomique. Une pareille observation au point (x_i, y_i, z_i) fera connaître la longitude astronomique u_i et la latitude astronomique v_i en ce point. D'autre part, l'élimination de h_i entre les trois équations ci-dessus, après que les paramètres $c_1, c_2, \ldots c_n$ y auront été remplacés par les valeurs numériques adoptées, laissera deux équations en (u'_i, v'_i), coordonnées polaires de la normale à la surface de référence menée par ce point, dans le sens des altitudes croissantes, longitude géodésique et latitude géodésique en ce point. La déviation δ_i de la verticale y est l'angle de la verticale et de la normale à la surface de référence, tel que

$$\cos \delta_i = \sin v_i \sin v'_i + \cos v_i \cos v'_i \cos (u_i - u'_i)$$

ou que

$$\delta_i = \begin{vmatrix} \sin u_i \cos v_i & \sin v_i \\ \sin u'_i \cos v'_i & \sin v'_i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \sin v_i \cos u_i & \cos v_i \\ \sin v'_i \cos u'_i & \cos v'_i \end{vmatrix}^2 + \cos^2 v_i \cos^2 v'_i \begin{vmatrix} \cos u_i & \sin u \\ \cos u'_i & \sin u'_i \end{vmatrix}.$$

Le calcul de cette déviation en divers points permet l'étude de l'allure locale du géoïde en chacun de ces points.

17. Dans la détermination de la surface de référence, on pourra plutôt demander que les déviations de la verticale en tous les sommets de la triangulation satisfassent à telle condition : par exemple que la somme des carrés des sinus des déviations de la verticale en tous ces points soit minimum. Il faut alors considérer l'expression ci-dessus de $\sin^2 \delta_i$ comme calculée sans que les paramètres $c_1, c_2, \ldots c_n$ aient reçu des valeurs numériques dans les équations paramétriques de la surface de référence, et on aura, pour le calcul des valeurs numériques répondant au problème actuel, les n équations

$$\frac{\partial \Sigma \sin^2 \delta_i}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma \sin^2 \delta_i}{\partial c_2} = 0, \ldots \quad \frac{\partial \Sigma \sin^2 \delta_i}{\partial c_n} = 0.$$

Renonçant à ce point de vue, supposons que le nombre n des paramètres soit impair. On pourra aussi demander que la déviation de la verticale soit nulle en $\frac{2n-1}{2}$ points, et que l'altitude de l'un d'entre eux (x_k, y_k, z^k) ait telle valeur h_k. Les valeurs numériques des n paramètres se tireront alors du système d'équations constitué de la manière suivante :

1° par l'équation que laisse l'élimination des inconnues (u'_k, v'_k) entre les trois équations

$$x_k = x\,(u'_k, v'_k, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h_k \cos u'_k \cos v'_k,$$
$$y_k = y\,(u'_k, v'_k, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h_k \sin u'_k \cos v'_k,$$
$$z_k = z\,(u'_k, v'_k, 0, c_1, c_2, \ldots c_n) + h_k \sin v'_k ;$$

2° par les $(n-1)$ équations que laisse l'élimination de h_i entre les $\frac{2n-1}{2}$ équations $\left(i = 1, 2, .. \frac{2n-1}{2}\right)$

$$x_i = x(u_i, v_i, 0, c_1, c_2, \ldots, c_n) + h_i \cos u_i \cos v_i,$$
$$y_i = y(u_i, v_i, 0, c_1, c_2, \ldots, c_n) + h_i \sin u_i \cos v_i,$$
$$z_i = z(u_i, v_i, 0, c_1, c_2, \ldots, c_n) + h_i \sin v_i.$$

18. La surface de référence adoptée par les géodésiens est un ellipsoïde de révolution auquel il est imposé, a priori, d'avoir son axe de révolution parallèle à l'axe de rotation de la Terre considéré comme lié à celle-ci d'une manière invariable. Par rapport à des axes rectangulaires solidaires de la Terre, de la manière définie ci-dessus, la détermination, en forme, grandeur et position, d'un pareil ellipsoïde comporte encore les valeurs numériques de cinq paramètres, à savoir les coordonnées (X, Y, Z) de son centre, son demi-axe équatorial a et son excentricité ϵ.

Les coordonnées géodésiques (u', v', h) d'un point (x, y, z) satisfont aux trois équations

$$x = (aC' + h) \cos u \cos v,$$
$$y = (aC' + h) \sin u \cos v,$$
$$z = (aS' + h) \sin v$$

où

$$C' = (1 - \epsilon^2 \sin^2 v')^{-\frac{1}{2}}, \quad S' = (1 - \epsilon^2)\, C'.$$

Les cinq paramètres disponibles pourraient se déterminer par la condition que cinq points (choisis de préférence dans le voisinage de la côte) aient telles altitudes, — ou bien, par la condition que la somme des carrés des sinus des déviations en toutes les stations astronomiques, sommets d'une triangulation, soit minimum, — ou bien, le nombre des paramètres étant impair, que l'altitude de tel point ait telle valeur, tandis que la déviation de la verticale serait nulle en deux points convenablement choisis dans le territoire à étudier. Plutôt que d'entreprendre à frais nouveaux la détermination de tous les paramètres, on a préféré attribuer d'abord au géoïde un demi grand axe et une excentricité résultant de mesures d'arcs effectuées dans l'hypothèse d'un géoïde ellipsoïdal de révolution. Ceci réduit à trois les paramètres encore disponibles, à savoir les coordonnées du centre (X, Y, Z) de la surface de référence, et la définition de celle-ci se complète par la condition que la déviation de la verticale soit nulle en une station (x_o, y_o, z_o) à laquelle on attribue, de plus, une altitude h_o. C'est le choix arbitraire des nombres (x_o, y_o, z_o) qui complète la définition des axes de coordonnées, et les longitude et latitude (u_o, v_o) de

cette station résultent d'observations astronomiques. Les équations en (X, Y, Z) sont

$$x_o = X + (aC_o + h_o)\cos u_o \cos v_o,$$
$$y_o = Y + (aC_o + h_o)\sin u_o \cos v_o,$$
$$z_o = Z + (aS_o + h_o)\sin v_o$$

où

$$C_o = (1 - \epsilon^2 \sin^2 v_o)^{-\frac{1}{2}}, \quad S_o = (1 - \epsilon^2)\, C_o.$$

Ce choix des paramètres a et ϵ, eu égard aux résultats d'une méthode à laquelle, précisément, on renonce, n'est probablement bizarre que du point de vue théorique, et la surface de référence ainsi déterminée se prête probablement aussi bien que d'autres à l'exploration géodésique d'une région terrestre. Cette exploration comporte principalement le calcul de la déviation de la verticale en des points suffisamment rapprochés, à la fois stations astronomiques et sommets de la triangulation. C'est ainsi l'étude, point par point, en direction, du champ de la pesanteur, et, par conséquent, dans une certaine mesure, l'étude de la distribution des masses au voisinage de la surface terrestre. Il en résulte un commencement de collaboration de la Géodésie et de la Géologie. Cette tendance s'accentue dans l'exploration du champ terrestre en intensité, par la mesure, répétée de point en point, de l'accélération due à la pesanteur, partie de la Géodésie qui se trouve en dehors du cadre de ce schéma.

Théorie des instruments visuels

par M. É Goedseels (1)

AVANT-PROPOS

La présente Théorie des instruments visuels *a été extraite par M. le professeur* ALLIAUME *de notre Cours manuscrit d'*Astronomie, Géodésie *et* Topographie, *et arrangée par lui. Nous tenons à lui exprimer nos sincères remerciements.*

Cette Théorie s'adresse principalement à des lecteurs familiarisés avec le maniement des instruments, ou tout au moins à des lecteurs ayant des instruments à leur disposition. Pour les autres, la lecture de notre Théorie exigerait une attention beaucoup plus intense.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

§ 1. — PRÉLIMINAIRES

1. Considérations générales. — Les astronomes, les géodésiens et les topographes ont inventé un grand nombre d'instruments ayant pour buts : 1° de faire passer des lignes ou des plans de visée par les points terrestres ou célestes, 2° de mesurer les angles que ces lignes ou ces plans font ou bien entre eux ou bien avec certaines directions naturelles telles que la verticale, l'axe du monde, etc. Tous ces instruments diffèrent nécessairement les uns des autres par des détails de construction répondant aux divers buts pratiques pour lesquels on les a inventés. Mais on peut néanmoins les ramener à un petit nombre de types dont la théorie peut être faite d'une manière générale.

Notre ouvrage a pour objet l'étude des instruments ainsi entendue.

2. Classification générale des instruments. — En considérant les instruments à un point de vue général, on peut les classer en trois catégories ou genres : les instruments primaires, les instruments binaires et les instruments ternaires.

---

(1) SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, *Volume jubilaire* (1926).

Un instrument primaire se compose uniquement d'un viseur soit à lignes de visée, soit à plans de visée.

Un instrument binaire se compose d'un instrument primaire tournant autour d'un axe de rotation auquel il est invariablement lié.

Un instrument ternaire se compose d'un instrument binaire tournant autour d'un pivot invariablement lié à l'axe de rotation de l'instrument binaire.

Exemples. — L'équerre d'arpenteur, et en général toutes les équerres topographiques sont des instruments primaires.

Les niveaux, les sextants, les lunettes méridiennes sont des instruments binaires.

Les théodolites, les tachéomètres, les équatoriaux sont des instruments ternaires.

Chaque instrument comporte un système d'axes rectangulaires qui doit être défini avec le plus grand soin dans chaque cas concret, et qui sert à repérer les lignes ou les plans de visée essentiels à l'instrument.

Les quelques indications que nous venons de donner et que nous compléterons dans la suite, suffisent pour faire entrevoir que les phénomènes de réfraction et de réflexion jouent un rôle important dans les instruments dont nous ferons l'étude. Pour éviter les redites et les renvois, nous exposerons préalablement, dans les deux paragraphes ci-après, nos idées sur les deux susdits phénomènes.

§ 2. — RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

3. Description du phénomène. — Lorsqu'un rayon lumineux, issu d'un point A, rencontre une surface réfléchissante en un point B, il se brise en ce point et y prend une nouvelle direction BC, symétrique de BA par rapport à la normale BN à la surface réfléchissante.

Il résulte de là que si cette surface est un plan M, tous les rayons réfléchis BC correspondant au même point A produisent sur l'œil la même impression que s'ils étaient émis par le point A', symétrique du point A par rapport au plan M.

Le point A' est donc l'image du point A.

4. Problème fondamental. — *On donne :* 1° *l'équation*

$$ax + by + cz + d = 0,$$

d'un plan réflecteur, 2° *les coordonnées* X, Y, Z *d'un point* A, *par rapport à des axes rectangulaires quelconques* OXYZ.

On demande les coordonnées X', Y', Z' *de l'image* A' *du point* A.

Pour résoudre ce problème, il suffit d'exprimer que la droite AA' est perpendiculaire au plan M et divisée en deux parties égales par le point

où elle rencontre ce plan. On obtient ainsi, en désignant les coordonnées de ce dernier point par x, y, z,

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$\frac{X - X'}{a} = \frac{Y - Y'}{b} = \frac{Z - Z'}{c},$$

$$2x = X + X',$$
$$2y = Y + Y',$$
$$2z = Z + Z'.$$

Ces relations forment un système de six équations linéaires par rapport aux inconnues x, y, z, X', Y', Z'.

En les résolvant par rapport aux trois dernières inconnues, les seules qu'on demande, et en posant

$$P = \frac{aX + bY + cZ + d}{a^2 + b^2 + c^2},$$

on obtient

$$X' = X - 2aP,$$
$$Y' = Y - 2bP,$$
$$Z' = Z - 2cP.$$

On a évidemment de même

$$X = X' - 2aP',$$
$$Y = Y' - 2bP',$$
$$Z = Z' - 2cP',$$

où

$$P' = \frac{aX' + bY' + cZ' + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

5. Cas particulier. — Le plan réflecteur passe par l'axe OZ. Une des deux directions prises sur la trace de ce plan réflecteur sur le plan OXY fait avec OX un angle α.

Le point A est situé dans le plan OXY.

L'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

devient dans ce cas

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0,$$

et l'on a

$$P = X \sin\alpha - Y \cos\alpha,$$
$$X' = X - 2P \sin\alpha,$$
$$Y' = Y + 2P \cos\alpha,$$
$$Z' = Z,$$

ou, en éliminant P,

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = X\cos 2\alpha + Y\sin 2\alpha, \\ Y' = X\sin 2\alpha - Y\cos 2\alpha, \\ Z' = Z. \end{cases}$$

On a de même

$$(2)\qquad \begin{cases} X = X'\cos 2\alpha + Y'\sin 2\alpha, \\ Y = X'\sin 2\alpha - Y'\cos 2\alpha, \\ Z = Z'. \end{cases}$$

Comme vérifications on a

$$X' = X \quad \text{et} \quad Y' = -Y \quad \text{pour } \alpha = 0 \text{ ou } \pi ;$$
$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = Y \quad \text{pour } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 3\frac{\pi}{2}.$$

6. Première application. — *Un rayon incident* R_1 *se réfléchit sur un plan* P_1 *dans une direction* R_2. *On donne le plan* P_1 *ainsi que la direction* R_1. *On demande la direction* R_2.

Pour résoudre ce problème, on peut procéder ou bien graphiquement, en traçant une épure exacte d'après les règles enseignées en géométrie descriptive, ou bien par le calcul.

Dans ce second cas, il suffit de prendre deux points quelconques A et B situés sur le rayon incident, et de déterminer les points correspondants A′ et B′ par l'application du problème fondamental.

Si la lumière va de A en B sur le rayon incident R_1, elle va de A′ vers B′ sur le rayon réfléchi.

Ces calculs sont élémentaires. Nous les effectuerons pour le seul cas qui nous intéresse ici : celui où le plan réflecteur P_1 passe par l'axe OZ, et où l'équation de ce plan peut, par suite, être mise sous la forme

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'on donne les coordonnées ξ, η, ζ du point A et les coordonnées polaires β, δ de la direction AB.

Puisque le point B n'est pas donné, nous pouvons le choisir arbitrairement, par exemple à une distance 1 du point A.

Les coordonnées du point B sont ainsi

$$\xi + \cos\beta\cos\delta, \qquad \eta + \sin\beta\cos\delta, \qquad \zeta + \sin\delta.$$

En appliquant les formules (1), on trouve pour les coordonnées du point B′, image de B :

$$X_{B'} = \xi\cos 2\alpha + \eta\sin 2\alpha + \cos\delta\cos(2\alpha - \beta),$$
$$Y_{B'} = \xi\sin 2\alpha - \eta\cos 2\alpha + \cos\delta\sin(2\alpha - \beta),$$
$$Z_{B'} = \zeta + \sin\delta.$$

Pour le point A′, image de A, on a

$$X_{A'} = \xi \cos 2\alpha + \eta \sin 2\alpha,$$
$$Y_{A'} = \xi \sin 2\alpha - \eta \cos 2\alpha,$$
$$Z_{A'} = \zeta.$$

La direction allant de A′ vers B′ a pour composantes

$$(X_{B'} - X_{A'}), \quad (Y_{B'} - Y_{A'}), \quad (Z_{B'} - Z_{A'}).$$

Si l'on désigne par β' et δ' les coordonnées polaires de la même direction A′B′, les mêmes composantes valent $\cos\beta' \cos\delta'$, $\sin\beta' \cos\delta'$ et $\sin\delta'$. On a donc

$$X_{B'} - X_{A'} = \cos\delta \cos(2\alpha - \beta) = \cos\beta' \cos\delta',$$
$$Y_{B'} - Y_{A'} = \cos\delta \sin(2\alpha - \beta) = \sin\beta' \cos\delta',$$
$$Z_{B'} - Z_{A'} = \sin\delta = \sin\delta'.$$

Les angles de pente δ et δ' étant aigus, on a, en vertu de la dernière formule,

$$\delta' = \delta. \tag{3}$$

En introduisant ce résultat dans les deux formules précédentes, on obtient :

$$\beta' = 2\alpha - \beta + 2m\pi. \tag{4}$$

7. Corollaire. — Les résultats $\delta' = \delta$ et $\beta' = 2\alpha - \beta + 2m\pi$ peuvent être énoncés en principe de la manière suivante : *Lorsqu'on projette un rayon incident* R_1 *et le rayon réfléchi correspondant* R_2 *sur un plan quelconque, perpendiculaire au plan réflecteur, les deux projections obéissent à la loi de la réflexion. De plus les deux rayons* R_1 *et* R_2 *ont le même angle de pente sur le plan de projection.*

8. Deuxième application. — *Un rayon incident* R_1 *se réfléchit sur un premier plan* P_1, *dans une direction* R_2. *Le rayon* R_2 *se réfléchit ensuite sur un second plan* P_2, *dans une direction* R_3.

On donne les plans P_1 *et* P_2 *ainsi que la direction du premier rayon incident* R_1.

On demande l'angle V *formé par les directions* R_1 *et* R_3.

Prenons pour axe OZ l'arête du dièdre P_1, P_2.

Désignons par α_1 et α_2 les angles de position des deux faces de ce dièdre, par (β_1, δ_1), (β_2, δ_2) et (β_3, δ_3) les coordonnées polaires des directions R_1, R_2 et R_3. Nous avons, en vertu de la première application :

$$\delta_2 = \delta_1, \qquad \beta_2 = 2\alpha_1 - \beta_1 + 2m_1\pi,$$
$$\delta_3 = \delta_2, \qquad \beta_3 = 2\alpha_2 - \beta_2 + 2m_2\pi.$$

Nous déduisons de là

$$\delta_3 = \delta_1, \qquad \beta_3 = 2(\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 + 2m\pi.$$

Connaissant les coordonnées polaires β_3 et δ_3 de la direction R_3 on a

$$\cos V = \cos \delta_1 \cos \delta_3 \cos (\beta_3 - \beta_1) + \sin \delta_1 \sin \delta_3,$$

ou, en remplaçant β_3 et δ_3 par leurs valeurs,

$$\cos V = \cos^2 \delta_1 \cos 2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin^2 \delta_1.$$

Lorsque $\delta_1 = 0$, la formule ci-dessus se simplifie et devient

$$V = \pm 2(\alpha_2 - \alpha_1) + 2m\pi.$$

9. Troisième application. — *Un rayon incident* R_1 *se réfléchit successivement sur des plans* P_1, P_2, ... P_n *parallèles à une même droite* D, *dans des directions* R_2, R_3, ... R_{n+1}.

On rapporte la figure à un système OXYZ *dont l'axe* OZ *est parallèle à* D.

On donne les angles de position α_1, α_2, ... α_n *des plans réflecteurs, et les coordonnées polaires* β_1, δ_1 *de la direction* R_1.

On demande : 1° *les coordonnées polaires* β_{n+1}, δ_{n+1} *de la dernière direction réfléchie* R_{n+1}, 2° *l'angle* V *que fait cette dernière direction avec la première direction incidente* R_1.

On a successivement, en vertu des applications précédentes,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_2 = \delta_3 \ldots = \delta_{n+1}, \\
\beta_2 &= 2\alpha_1 - \beta_1 + 2m_1\pi, \\
\beta_3 &= 2\alpha_2 - \beta_2 + 2m_2\pi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{n+1} &= 2\alpha_n - \beta_n + 2m_n\pi.
\end{aligned}$$

En multipliant par -1 les relations ci-dessus dans lesquelles β est affecté d'un indice impair dans le premier membre, et en additionnant ensuite ces relations membre à membre, on obtient

$$(-1)^{n+1} \beta_{n+1} = 2 \left\{ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + (-1)^{n+1} \alpha_n \right\} - \beta_1 + 2m\pi,$$

ou

$$\beta_{n+1} = (-1)^{n+1} 2 \left\{ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + (-1)^{n+1} \alpha_n \right\} - (-1)^{n+1} \beta_1 + 2m\pi,$$

ou encore, en faisant usage de la notation connue qui désigne une somme par son terme général placé entre crochets,

$$\beta_{n+1} = (-1)^{n+1} 2 \left[(-1)^{i+1} \alpha_i \right] - (-1)^{n+1} \beta_1 + 2m\pi.$$

Connaissant ainsi $\delta_{n+1} = \delta_1$ et β_{n+1}, on peut calculer l'angle V comme dans l'application précédente.

Dans le cas où le nombre n de réflexions est pair on a

$$\beta_{n+1} = -2\left[(-1)^{i+1}\alpha_i\right] + \beta_1 + 2m\pi$$

et, par suite,

$$\cos V = \cos^2\delta \cos 2\left[(-1)^{i+1}\alpha_i\right] + \sin^2\delta.$$

Si l'on a de plus $\delta = 0$, ce résultat devient

$$V = \pm 2\left[(-1)^{i+1}\alpha_i\right] + 2m\pi,$$

et l'angle V est constant.

§ 3. — RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE

10. Phénomène de la réfraction. — Lorsqu'un rayon lumineux simple ou monochromatique, AO (fig. 1), appartenant à un milieu transparent M, rencontre, en un point O et sous un angle convenable, la surface séparant ce milieu d'un autre milieu transparent, m, il pénètre dans cet autre milieu et y suit une direction OB′ différente du prolongement géométrique OA′ de AO (1).

L'expérience a montré que cette *réfraction* obéit sensiblement aux trois lois énoncées ci-après.

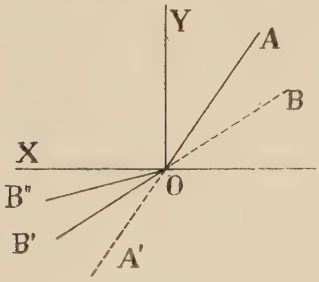


Fig. 1.

Première loi de la réfraction. — Le prolongement OA′ du rayon incident AO, le rayon réfracté OB′ et la normale OX à la surface de séparation des milieux M et m, se trouvent dans un même plan.

Sauf indication contraire, nous prendrons l'axe positif OX dans le milieu m. Mais tout ce que nous dirons s'appliquera néanmoins à la direction inverse.

Remarque. — Pour bien préciser nous traçons dans le plan XOA′B′ une direction OY perpendiculaire à OX, et nous convenons d'attribuer aux angles situés dans ce plan une direction positive telle qu'on ait

$$XOY = +\frac{\pi}{2},\quad YOX = -\frac{\pi}{2}.$$

Les angles ayant OX pour origine seront dits *polaires*.

(1) Certaines substances, notamment le spath d'Islande, jouissent de la propriété de donner lieu à deux rayons différents OB′ et OB″. Mais, comme cette propriété a seulement été appliquée à certaines jumelles télémétriques militaires, nous ne nous en occuperons pas. Nous considérerons seulement le phénomène de la réfraction simple, correspondant à un rayon unique OB′.

Deuxième loi de la réfraction. — Si on désigne par i l'angle polaire aigu XOA′ de la direction OA′ que suit la lumière incidente, et par r l'angle polaire aigu XOB′ de la direction OB′ que suit la lumière réfractée, le rapport

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

a une valeur > 0, constante, pour la même lumière simple ou monochromatique et les mêmes milieux M et m.

La constante positive n, porte le nom d'*indice de réfraction du milieu* m *par rapport au milieu* M.

Lorsqu'on donne l'indice de réfraction n d'un milieu m, sans faire mention du milieu M, ce dernier est toujours l'air atmosphérique.

Lorsque le milieu M est le vide, l'indice de réfraction est dit *absolu*.

L'indice de réfraction du milieu M par rapport au milieu m est dit *indice de retour*.

Troisième loi de la réfraction simple. — Lorsque la lumière suit un parcours inverse, B′O, dans le milieu m, elle pénètre dans le milieu M en y suivant la direction OA. L'indice de retour est donc égal à $(1 : n)$.

11. Problème fondamental. — *On donne* (fig. 2) *:*

1° *le centre* O *et le rayon* R = ON *d'une calotte sphérique séparant un milieu* M, *dit extérieur, d'un milieu* m, *dit intérieur ;* 2° *l'indice de réfraction* n *du milieu* m *par rapport au milieu* M ; 3° *un système* NX′Y′ *dont l'axe* NX′ *est le rayon* ON *prolongé ;* 4° *l'équation* $y' = Ax'$ *d'un rayon incident* PN, *appartenant au milieu* M.

On demande l'équation $y' = Bx'$ *du rayon réfracté, correspondant au rayon incident* $y' = Ax'$.

Désignons par P l'angle polaire incident, et par p l'angle polaire réfracté.

Nous avons :

$$\sin P = n \sin p, \qquad A = \operatorname{tg} P, \qquad B = \operatorname{tg} p.$$

Ces trois équations renferment deux variables connues, A et n, et trois variables inconnues P, p et B.

On en déduit

$$B^2 = \frac{A^2}{n^2(1 + A^2) - A^2},$$

On sait que les angles P et p sont aigus et ont même signe. On a donc

$$B = \frac{A}{\sqrt{n^2(1 + A^2) - A^2}},$$

et l'équation demandée est

$$y' = \frac{Ax'}{\sqrt{n^2(1 + A^2) - A^2}}.$$

12. Problème. — *On donne* (fig. 2) :

1° *le centre* O *et le rayon* R *d'une calotte sphérique séparant un milieu extérieur* M *d'un milieu intérieur* m ; 2° *l'indice de réfraction* n *du milieu intérieur* m *par rapport au milieu extérieur* M ; 3° *un point* P, *réel ou virtuel, appartenant au milieu extérieur* M ; 4° *la valeur* ω *de l'angle au centre* MON *ayant pour origine la droite* OM *joignant le centre* O *de la calotte sphérique au point de rencontre* M *de cette calotte et de la droite indéfinie* OP, *et ayant pour extrémité la droite* ON *joignant le même centre* O *à un point quelconque* N *de la calotte sphérique.*

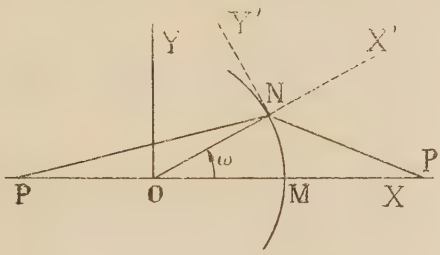


FIG. 2.

On demande : 1° *de rapporter la figure à un système* OXY *ayant son origine au centre de la calotte sphérique, sa direction positive* OX *en coïncidence avec* OM *et son axe* OY *dans le plan* PON ; 2° *de calculer l'abscisse* p *du point* p *où le rayon intérieur correspondant au rayon extérieur* PN *rencontre la droite* OP ; 3° *de développer* p *en série par rapport à* ω, *en s'arrêtant après le terme du second degré.*

Pour ramener ce problème au précédent, il suffit de considérer un système auxiliaire NX'Y' dont l'axe NX' est normal à la calotte sphérique, de résoudre le problème par rapport à ces axes NX'Y', et de passer finalement aux axes donnés OXY.

Les formules de transformation entre les deux systèmes sont

$$\begin{cases} x = (R + x')\cos\omega - y'\sin\omega, \\ y = (R + x')\sin\omega + y'\cos\omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\omega + y\sin\omega - R, \\ y' = -x\sin\omega + y\cos\omega. \end{cases}$$

Si l'on désigne par P l'abscisse OP du point P, l'équation du rayon PN par rapport aux axes NX'Y' est

$$y' = \frac{-P\sin\omega}{P\cos\omega - R}\cdot x'.$$

En vertu du problème précédent, l'équation du rayon Np est

$$y' = \frac{x'P\sin\omega : (R - P\cos\omega)}{\sqrt{\{(n^2-1)P^2\sin^2\omega : (R - P\cos\omega)^2\} + n^2}}.$$

Pour trouver l'équation du même rayon Np par rapport aux axes OXY, il suffit d'appliquer les formules de transformation.

L'abscisse à l'origine p du point p s'obtient ensuite en annulant y.

En désignant par ρ le radical qui figure dans le second membre ci-dessus, on obtient

$$p = \frac{RP}{P\cos\omega + (R - P\cos\omega)\rho}.$$

En effectuant le développement en série demandé, on obtient d'abord pour le terme indépendant $f(0)$ la valeur

$$RP : \{ P + n(R - P) \}.$$

Le coefficient $f'(0)$ du terme en ω est nul, et le coefficient $\{ f''(0) : 2 \}$ du terme en ω^2 a une valeur finie.

13. Formules pratiques. — Dans les applications pratiques on emploie des calottes sphériques pour lesquelles l'angle ω prend des valeurs suffisamment petites pour que le terme en ω^2 puisse être négligé. Au besoin, on intercepte au moyen de diaphragmes les rayons pour lesquels ω prendrait des valeurs trop grandes. On a donc sensiblement

$$p = \frac{RP}{P + n(R - P)},$$

et les rayons PN issus d'un même point P concourent sensiblement au point p.

Nous avons pris l'axe positif OX en coïncidence avec OM, du côté de la calotte sphérique. Si nous renversons le sens positif OX, et si nous convenons de désigner par R la valeur négative de OM, la relation ci-dessus subsiste. Cette relation est donc générale.

En remplaçant les notations p, P et R par les longueurs Op, OP et OM qu'elles représentent, on a dans tous les cas

$$Op = \frac{OM \cdot OP}{OP + n(OM - OP)}$$

ou

$$Op = \frac{OM \cdot OP}{OP - nMP}.$$

En chassant le dénominateur on obtient

$$Op \cdot OP - n \cdot Op \cdot MP = OM \cdot OP,$$

ou

$$\frac{Mp}{MP} = n\,\frac{Op}{OP}$$

ou encore

$$\frac{1}{Op} - \frac{n}{OP} = \frac{n-1}{OM}.$$

L'avant-dernière égalité peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{\overline{MP}} - \frac{n}{\overline{Mp}} = \frac{n-1}{\overline{OM}}.$$

Pour les faces planes, il suffit de faire croître $\pm$ OM indéfiniment. Il vient ainsi :

$$\frac{\overline{Mp}}{\overline{MP}} = n.$$

14. Équations de correspondance. — Nous venons de voir que les rayons lumineux issus d'un point P d'un milieu extérieur M, séparé d'un milieu intérieur m par une calotte sphérique, concourent sensiblement en un point intérieur p.

On démontrerait de même que les rayons intérieurs issus du point p concourent sensiblement en un point extérieur P', dont on peut déterminer la position par les formules démontrées plus haut, en y remplaçant P par p, p par P' et n par $1 : n$. Il viendrait ainsi

$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1:n}{\overline{Op}} = \frac{(1:n)-1}{\overline{OM}}.$$

On peut mettre cette relation sous la forme

$$\frac{1}{\overline{Op}} - \frac{n}{\overline{OP'}} = \frac{n-1}{\overline{OM}}.$$

En comparant cette égalité à la formule

$$\frac{1}{\overline{Op}} - \frac{n}{\overline{OP}} = \frac{n-1}{\overline{OM}}$$

trouvée précédemment, on voit que les longueurs OP' et OP sont égales, et conséquemment que les points P' et P coïncident. Il résulte de là qu'en restant dans les limites des valeurs de ω pour lesquelles on peut admettre les résultats trouvés plus haut, à chaque point extérieur P correspond un point intérieur p et réciproquement, en d'autres termes, que les points P et p sont les images l'un de l'autre.

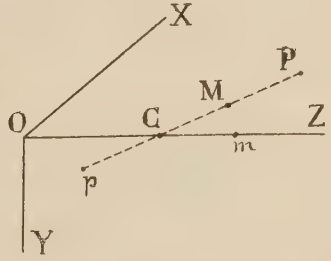


FIG. 3.

Pour trouver les équations de correspondance entre les deux milieux, nous rapporterons les milieux à un système OXYZ (fig. 3) dont l'axe OZ passe par le centre C et le point milieu m de la calotte sphérique réfringente, nous désignerons par X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque P du milieu M, et par x, y, z, les coordonnées de son image m ; ensuite nous chercherons les relations existant entre ces diverses coordonnées.

A cet effet, nous désignerons par ω l'angle aigu mCM pris positivement, et, par suite, par $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ l'angle de pente de la direction CM dans le système OXYZ. Nous désignerons en outre par α l'angle de position de la même direction.

Nous supposerons enfin que l'angle ω reste dans les limites telles qu'on puisse en négliger les puissances du degré supérieur au premier. Nous aurons donc

$$x = Cp \cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \omega \,.\, Cp \cos\alpha,$$

$$y = Cp \sin\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \omega \,.\, Cp \sin\alpha,$$

$$z = OC + Cp \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = OC + Cp.$$

Nous aurons de même

$$X = \omega \,.\, CP \,.\, \cos\alpha,$$
$$Y = \omega \,.\, CP \,.\, \sin\alpha,$$
$$Z = OC + CP.$$

Nous avons d'autre part, en vertu des formules trouvées précédemment,

$$\frac{1}{Cp} - \frac{n}{CP} = \frac{1-n}{CM} = \frac{1-n}{Cm}.$$

En éliminant Cp, CP et α entre les diverses formules ci-dessus, on fait disparaître ω et il reste les équations de correspondance :

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{X(OM - OC)}{(n \,.\, Om - OC) + (1-n)Z}, \\ y = \dfrac{Y(Om - OC)}{(n \,.\, Om - OC) + (1-n)Z}, \\ z = \dfrac{(n-1)Om \,.\, OC + (Om - n \,.\, OC)Z}{(n\,Om - OC) + (1-n)Z}. \end{cases}$$

La correspondance entre deux milieux M et m séparés par une calotte sphérique réfringente est donc *un cas particulier de l'homographie.*

Nous avons établi les formules de correspondance ci-dessus en prenant l'axe positif OZ dans la direction allant du centre C au point milieu m de la calotte sphérique. Lorsqu'on renverse le sens positif de OZ, les quantités Om, OC, Z et z changent de signe. Par conséquent, les formules de correspondance subsistent.

15. Réfractions à travers une série de calottes sphériques. — Deux figures en correspondance homographique avec une même troi-

sième sont aussi en correspondance homographique. Par conséquent, deux milieux séparés par une suite de calottes sphériques réfringentes se correspondent homographiquement.

L'image d'une droite vue à travers une série de calottes sphériques réfringentes est donc une ligne droite. Cette propriété jouera un rôle important dans l'étude des viseurs.

Pour l'étude des systèmes optiques nous aurons à considérer une suite de calottes sphériques réfringentes dont les centres se trouvent sur une même droite. Les calottes sphériques ainsi disposées sont dites *centrées*. Elles jouissent de propriétés spéciales que nous établirons ci-après.

16. Des calottes sphériques centrées. — 1° *Équations de correspondance.* Les équations de correspondance (5) relatives à une seule calotte sphérique peuvent être écrites sous la forme

$$x = \frac{aX}{b + cZ}, \qquad y = \frac{aY}{b + cZ}, \qquad z = \frac{d + kZ}{b + cZ}.$$

En résolvant ces équations par rapport à X, Y, Z on obtient

$$X = \frac{\{(cd - bk) : a\{x}{-k + cz},$$

$$Y = \frac{\{(cd - bk) : a\{y}{-k + cz},$$

$$Z = \frac{d - bx}{-k + cz}.$$

Les équations de correspondance inverses ont donc la même forme que les premières.

Cette forme subsiste pour plusieurs calottes sphériques successives centrées.

Considérons en effet un second milieu M' correspondant au milieu m en vertu de relations de la forme

$$X' = \frac{a'x}{b' + c'z}, \qquad Y' = \frac{a'y}{b' + c'z}, \qquad Z' = \frac{d' + k'z}{b' + c'z}.$$

Pour obtenir les équations de correspondance entre les milieux M et M' il suffit évidemment de remplacer, dans ces trois dernières formules, x, y, z par leurs valeurs données par les trois premières. Il vient ainsi

$$X' = \frac{aa'X}{(bb' + dc') + (cb' + kc')Z},$$

$$Y' = \frac{aa'Y}{(bb' + dc') + (cb' + kc')Z},$$

$$Z' = \frac{(bd' + dK') + (cd' + kk')Z}{(bb' + dc') + (cb' + kc')Z}.$$

Nous pouvons donc dire que les équations de correspondance relatives à plusieurs calottes sphériques centrées ont la même forme que celles qui correspondent à une seule calotte sphérique, savoir

$$(6) \qquad x = \frac{aX}{b + cZ}, \qquad y = \frac{aY}{b + cZ}, \qquad z = \frac{d + kZ}{b + cZ}.$$

Au point de vue pratique les calottes multiples présentent l'avantage que les constantes contenues dans les seconds membres ci-dessus dépendent des indices de réfraction des diverses calottes sphériques, de leurs rayons et des positions relatives de leurs centres, en un mot d'une série de quantités que l'on peut choisir de manière à réaliser aussi bien que possible le but pratique que l'on a en vue dans chaque cas.

2° *Axe optique*. Lorsque deux ou plusieurs calottes sphériques sont centrées, on donne le nom d'*axe optique* du système à la ligne droite passant par les centres des calottes, c'est-à-dire par la droite que nous avons prise jusqu'à présent pour axe OZ.

3° *Plans focaux*. On obtient l'équation du plan focal du milieu M en égalant à zéro le dénominateur commun $(b + cZ)$ des équations de correspondance (6) ci-dessus. On obtient de même l'équation du plan focal du milieu m en annulant le dénominateur des équations de correspondance inverses.

Les deux plans focaux sont donc

$$b + cZ = 0, \qquad -k + cz = 0.$$

Ces plans sont parallèles, et perpendiculaires à l'axe optique.

On constate facilement que les images de deux ou plusieurs droites parallèles appartenant à un des deux milieux passent par un foyer situé dans le plan focal de l'autre milieu.

4° *Nœuds*. Considérons une image rectiligne quelconque

$$(7) \qquad x = pz + q, \qquad y = rz + s$$

non perpendiculaire à l'axe optique, et la droite correspondante

$$(8) \qquad \begin{cases} aX = p(d + kZ) + q(b + cZ), \\ aY = r(d + kZ) + s(b + cZ), \end{cases}$$

et proposons-nous de chercher la signification géométrique des conditions

$$p = (pd + qb) : a,$$
$$r = (rd + sb) : a$$

nécessaires et suffisantes pour que la droite (7) et son image (8) soient parallèles.

Nous déduisons de ces deux conditions

$$q = p(a - d) : b,$$
$$s = r(a - d) : b.$$

Si l'on remplace q et s par ces valeurs dans les équations de l'image, ces équations deviennent

$$x = p\left(z - \frac{a-d}{b}\right),$$

$$y = r\left(z - \frac{a-d}{b}\right).$$

On voit par ces équations que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite non perpendiculaire à l'axe optique et son image soient parallèles est que cette dernière passe par le point n ayant pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{a-d}{b}.$$

En faisant les mêmes substitutions dans les équations de la droite extérieure correspondante on trouve,

$$X = \frac{p}{a}\left(k + c\frac{a-d}{b}\right)\left\{Z - \frac{a}{k + c\dfrac{a-d}{b}}\right\},$$

$$Y = \frac{q}{a}\left(k + c\frac{a-d}{b}\right)\left\{Z - \frac{a}{k + c\dfrac{a-d}{b}}\right\}.$$

La condition nécessaire et suffisante est donc aussi que la droite extérieure passe par un point N ayant pour coordonnées

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = \frac{a}{k + c\dfrac{a-d}{b}}.$$

Les deux points n et N, situés sur l'axe optique, sont appelés les *nœuds* ou les *points nodaux* de l'ensemble des calottes sphériques.

Nous avons explicitement fait abstraction des droites perpendiculaires à l'axe optique, parce qu'il est facile de démontrer, au moyen des équations de correspondance, que ces droites sont parallèles à leurs images dans toutes les positions.

5° *Plans principaux*. Considérons une image rectiligne quelconque

$$x = A, \qquad y = B$$

parallèle à l'axe optique OZ, et la droite correspondante

$$aX - AcZ - Ab = 0,$$
$$aY - BcZ - Bb = 0.$$

Nous savons que cette droite correspondante passe par le foyer $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -(b : c)$ conjugué de la direction des droites $x = A$, $y = B$.

Nous voyons en outre, par les quatre équations ci-dessus, que la droite et son image se rencontrent au point ayant pour coordonnées A, B et $(a - b) : c$. Puisque la troisième coordonnée de ce point d'intersection est indépendante de A et B, toutes les parallèles $x = A$, $y = B$ à l'axe optique OZ rencontrent les droites dont elles sont les images dans le plan $z = (a - b) : c$.

On démontrerait de même, et il résulte du reste de la réciprocité des propriétés des droites extérieures et de leurs images : 1° que toutes les droites extérieures ($X = A$, $Y = B$) parallèles à l'axe optique OZ rencontrent leurs images dans le plan

$$Z = \{(cd - bk) : a + k\} : c,$$

2° que toutes ces images passent par le foyer $x = 0$, $y = 0$, $z = (k : c)$.

Les deux plans dont il vient d'être question, c'est-à-dire les plans

$$Z = (a - b) : c,$$
$$z = \{(cd - bk) : a + k\} : c$$

sont appelés les plans *principaux*.

L'existence des deux plans principaux et des deux foyers fournit un moyen simple et expéditif pour retrouver éventuellement toutes les propriétés des séries de calottes sphériques et, par suite, des séries de lentilles centrées. Désignons en effet (fig. 4) les deux plans principaux par p et P et les deux foyers par F et f.

Pour trouver l'image m d'un point extérieur M, il suffit de mener par ce point extérieur une droite MM′ passant par le foyer F et une droite Mm' parallèle à l'axe optique fF, et de chercher les points de rencontre M′ et m' de ces deux droites et des deux plans principaux p et P.

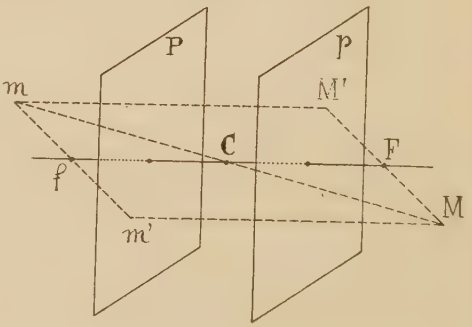


Fig. 4.

La droite MFM′ a pour image rectiligne une parallèle menée par M′ à l'axe optique, et la droite Mm' a pour image rectiligne la droite joignant le point m' au foyer f. Le point m, image du point M, est l'intersection de ces deux images rectilignes.

6° *Centre optique.* On voit immédiatement dans le croquis ci-dessus que les trois droites parallèles mM′, fF et m'M sont situées dans un même plan, et, par suite, que la droite mM joignant un point extérieur M à son image rencontre l'axe optique fF en un point C.

En calculant la coordonnée Z_c de ce point de rencontre C, on trouve

$$Z_c = \frac{d + (k - a)Z}{(b - a) + cZ}.$$

Lorsque Z croît indéfiniment, Z_c converge vers $\frac{k - a}{c}$.

Par conséquent, dans les questions où l'on se borne à considérer des points M ayant une coordonnée Z assez grande pour que Z_c atteigne sensiblement sa limite, on peut considérer le point C comme étant sensiblement constant.

Dans ce cas on donne à ce point C, ayant pour Z la fraction $\frac{k - a}{c}$, le nom de *centre optique* du système.

Nous avons signalé plus haut que l'emploi d'une série de calottes sphériques présente l'avantage de permettre de choisir les valeurs des constantes a, b, c, k.

CHAPITRE II

DES INSTRUMENTS PRIMAIRES OU VISEURS

17. Définition, rôle et classification. — Nous donnons le nom de *viseur* à tout appareil qui est invariablement lié à une ou plusieurs lignes ou bien à un ou plusieurs plans de visée.

Exemple. — Le *viseur simple* ou *viseur à pinnules* comprend : 1° deux plans de visée déterminés chacun par l'œilleton et un des fils, 2° une ligne de visée déterminée par l'œilleton et l'intersection des fils.

Les problèmes pratiques que l'on doit résoudre en Astronomie, en Géodésie et Topographie, et, en général, dans toutes les sciences d'observation où l'on emploie des viseurs sont, au fond, des problèmes de Géométrie. Si l'on possédait des règles assez longues pour joindre deux à deux les points dont on s'occupe, et des compas assez grands pour en mesurer les distances, on pourrait résoudre tous ces problèmes par les méthodes ordinaires de la Géométrie.

Cela n'est évidemment pas possible, mais on peut, en un instant, faire passer une ligne ou un plan de visée, appartenant à un viseur, par les points les plus éloignés, et substituer ainsi aux problèmes géométriques relatifs à cette ligne ou à ce plan des problèmes relatifs aux arêtes ou aux ilgnes matérielles du viseur. En résumé, le viseur joue dans les sciences pratiques où l'on opère sur des points éloignés les uns des autres le même rôle que la règle du dessinateur qui résout des problèmes de Géométrie.

Il y a deux genres de viseurs, les viseurs à *lignes de visée* et les viseurs à *plans de visée*. Ces lignes ou ces plans peuvent être uniques ou mul-

tiples, simples ou bifurqués. Chaque genre comprend des viseurs ordinaires et des viseurs à lunettes.

18. De la réfraction atmosphérique. — De nombreux phénomènes terrestres et célestes prouvent que les rayons lumineux se courbent en traversant les diverses couches de l'atmosphère, et que leurs courbures dépendent de la température et de la pression barométrique.

Si l'on connaissait exactement à tout instant les valeurs de ces deux éléments en tous les points de l'espace, on pourrait peut-être déterminer par le calcul les équations des rayons lumineux ou visuels.

L'absence de données certaines à ce sujet rend l'étude théorique du problème extrêmement ardue.

Des travaux très savants ont paru sur la matière. Nous nous placerons uniquement ici au point de vue expérimental, et nous renverrons pour le surplus le lecteur aux beaux travaux théoriques auxquels nous venons de faire allusion.

Nous nous occuperons seulement de la réfraction dans le sens vertical, parce que les déviations latérales sont si minimes et si variables qu'il est nécessaire d'en ranger les effets dans la catégorie des erreurs inévitables d'observation.

Chaque rayon visuel issu d'un point O et dirigé vers un point terrestre ou céleste M sera donc considéré comme une ligne courbe située tout entière dans un plan vertical. Nous le rapporterons à deux axes OXY dont le premier, OX, sera horizontal, et, par suite, dont le second, OY, sera vertical.

Chaque point de la courbe OM sera déterminé ainsi par ses deux coordonnées rectangulaires x et y ou ses deux coordonnées polaires ρ et ω.

Le rayon visuel apparent d'un observateur placé en O sera la tangente OT au point O à la courbe OM.

La réfraction aura donc pour effet de remplacer en apparence l'angle XOM par l'angle XOT.

Puisque l'erreur d'un angle XOT est, par définition, la quantité algébrique que l'on doit ajouter à cet angle pour avoir l'angle exact XOM, l'effet de la réfraction est d'affecter l'angle XOT de l'erreur TOM.

Nous désignerons les angles XOM et TOM respectivement par ω et $\Delta\omega$.

Tout le problème peut donc se ramener à la détermination de l'erreur $\Delta\omega$.

Cette erreur dépend de ω, de ρ, de la température θ et de la hauteur barométrique h. On a donc

$$\Delta\omega = f(\omega, \rho, \theta, h).$$

Si on voulait déterminer expérimentalement cette fonction, on devrait procéder, comme toujours, en décomposant le domaine de ses variables

en une série de domaines dans chacun desquels la fonction pourrait être considérée comme linéaire,

$$\Delta\omega = a + b\omega + c\rho + d\theta + eh,$$

et on devrait déterminer les constantes a, b, c, d, e à la manière habituelle, de préférence par la méthode de l'approximation minimum que nous avons exposée dans notre Théorie des erreurs.

Si l'on devait trop multiplier les régions pour obtenir des résidus satisfaisants, on pourrait ajouter aux seconds membres les termes du second degré, et ainsi de suite.

En procédant de la sorte, on obtiendrait des tables analogues à celles qui figurent dans toutes les éphémérides, et notamment dans la *Connaissance des Temps*. Ces tables donnent pour la température de 10 degrés centigrades et pour la pression barométrique $0^{m},760$, mesurées au point O, les valeurs absolues, dites valeurs moyennes, de $\Delta\omega$ pour les valeurs de ω de 10′ en 10′.

Une autre table donne les facteurs relatifs au baromètre et au thermomètre, par lesquels on doit multiplier la réfraction moyenne.

Les tables de la *Connaissance des Temps* reviennent à faire usage de la formule

$$\Delta\omega = (a + b\omega)(c + dh)(e + f\theta),$$

ou

$$\Delta\omega = A + B\omega + Ch + D\theta + E\omega h + F\omega\theta + Gh\theta + K\omega h\theta.$$

Les domaines de ω ont une amplitude de 10′, ceux de h de 1^{mm}, et ceux de θ de 1°.

Les quantités d et f sont nulles, puisqu'on n'interpole pas pour les fractions de millimètre ou de degré centigrade.

La formule se réduit donc à

$$\Delta\omega = ace + bce\omega.$$

Pour les travaux astronomiques auxquels ces tables sont destinées $\Delta\omega$ est indépendant de ρ.

Pour les levés terrestres les choses se passent autrement. Les variations dues à la pression barométrique sont rangées dans la catégorie des erreurs inévitables d'observation. Les variations dues à la température sont rangées dans la même catégorie, mais on s'abstient de faire des levés lorsque la température est trop élevée ou trop variable. On s'aperçoit facilement, par les vibrations des images dans les lunettes, quand il y a lieu de cesser les opérations sur le terrain.

C'est seulement dans les nivellements de précision qu'on tient compte de la réfraction.

Supposons par exemple qu'étant en un point a, on vise horizontalement une mire plantée verticalement en un point b. Désignons par c le point de

rencontre de la mire et de l'horizontale passant par a, et par conséquent par bc la hauteur de mire. Le rayon visuel se courbe sous l'action de la réfraction, et rencontre la mire en un point d.

L'erreur ϵ, qu'il faut ajouter à bd pour obtenir bc, est dc.

En désignant ac par ρ et en posant

$$\epsilon = A + B\rho + C\rho^2,$$

on vérifie par l'expérience que

$$A = 0,$$
$$B = 0,$$
$$C = 0{,}000000065976.\ \rho^2.$$

Pour savoir quand il y a lieu de tenir compte de ϵ, on peut consulter le tableau ci-après de quelques valeurs de ϵ.

ρ	ϵ	ρ	ϵ	ρ	ϵ
100^m	0,0007	600	0,0238	2000	0,2638
200	0,0026	700	0,0323	3000	0,5937
300	0,0059	800	0,0422	4000	1,0557
400	0,0106	900	0,0534	5000	1,6494
500	0,0165	1000	0,0660	6000	2,3751

19. Viseurs simples et viseurs à lunette. — Les cours de Topographie exposent les avantages et les inconvénients des viseurs à pinnules. Nous nous occuperons exclusivement ici du viseur à lunette. Selon l'agencement de ses organes, celle-ci sera une *lunette astronomique* ou une *lunette topographique* (ou bien géodésique).

20. Lunette astronomique. — Quatre particularités de la lunette astronomique frappent l'attention :

1° Le champ réticulaire est invariablement lié au corps de la lunette, de sorte que le tube réticulaire ne se déplace pas d'avant en arrière ;

2° Le champ réticulaire est éclairé ;

3° Les images m des points visés peuvent être amenées en divers endroits du champ réticulaire ;

4° Les lunettes sont rapportées à des axes primaires $O_1X_1Y_1Z_1$ dont l'origine O_1 peut être choisie arbitrairement mais dont les directions positives doivent être définies avec rigueur dans chaque cas concret.

Examinons successivement ces quatre particularités.

1° Les astres que l'on vise au moyen des lunettes astronomiques sont si

éloignés que les rayons lumineux issus de chaque point d'un astre sont sensiblement parallèles, et se concentrent par suite dans le plan focal de l'objectif. Le plan réticulaire peut donc être placé à demeure en coïncidence avec ce plan focal.

Lorsqu'il arrive, dans certains cas exceptionnels, qu'on doive viser des points terrestres rapprochés au moyen d'une lunette astronomique, on place entre l'objectif et ces points terrestres une lentille dont le plan focal passe par ces points. De cette manière, les rayons divergents issus d'un point terrestre sont rendus parallèles par la lentille supplémentaire, avant de rencontrer l'objectif de la lunette. Ce procédé est employé notamment lorsqu'on veut viser une mire terrestre placée à proximité d'une lunette astronomique.

2° Lorsqu'on pointe, le soir, une lunette astronomique sur une étoile ou sur un autre astre peu éclatant, on ne voit pas les fils réticulaires parce que la quantité de lumière émise par l'image de l'astre est insuffisante pour rendre visibles les fils. On est amené ainsi à éclairer faiblement le champ réticulaire.

Lorsque la lumière vient vers l'oculaire, la partie postérieure et invisible des fils est éclairée de même que tout le champ réticulaire et les fils se détachent en noir sur le champ.

Lorsqu'on veut observer ainsi une étoile très faible, il arrive que la lumière du champ étouffe (éclipse, dit-on) celle de l'astre, et, par suite, que l'image de ce dernier est imperceptible. Dans ce cas, on éclaire la face antérieure des fils par une lumière qui s'éloigne de l'oculaire. La lumière éclairant les fils se réfléchit vers ce dernier et arrive seule à l'œil de l'observateur. Les fils se détachent en clair sur un fond sombre et la petite étoile est bien visible sur ce dernier.

Les grandes lunettes astronomiques possèdent souvent un dispositif composé de prismes ou de miroirs qui permet à l'observateur d'éclairer à volonté la face antérieure ou la face postérieure du réticule au moyen d'un faisceau de lumière pénétrant dans le corps de la lunette par une ouverture latérale.

3° Les astronomes, pour des raisons que nous n'avons pas à détailler ici, utilisent diverses régions du champ réticulaire. Ils se servent à cet effet de fils mobiles dont les positions peuvent être repérées micrométriquement.

Si nous désignons par ξ et η les indications de deux micromètres théoriquement perpendiculaires, la position de chaque point m du champ réticulaire dépend des valeurs qu'il faut donner à ξ et η pour que les deux fils se croisent au point m. On rapporte les points m à des axes rectangulaires, dont les positions doivent être définies rigoureusement pour chaque instrument, et les constructeurs cherchent à faire coïncider les fils avec ces axes aux moments où les deux micromètres marquent chacun zéro.

Si l'on veut tenir compte des petites erreurs qui peuvent avoir échappé aux constructeurs, on doit poser

$$\xi = a_1 + b_1 m_1 + c_1 m_2,$$
$$\eta = a_2 + b_2 m_2 + c_2 m_2,$$

m_1 et m_2 étant les indications des deux micromètres.

Les constantes a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 doivent être déterminées par des observations, ainsi que les régions auxquelles ces constantes conviennent.

Il est impossible d'indiquer des moyens convenant à tous les cas.

La seule chose qu'on puisse dire est que les six constantes sont des inconnues qui s'ajoutent dans chaque série de recherches aux inconnues proprement dites dont ces recherches s'occupent.

Si ces recherches embrassent deux régions du champ réticulaire n'ayant pas les mêmes constantes, le nombre des inconnues supplémentaires est de douze, et ainsi de suite.

Le plus pratique est de déterminer les valeurs les plus approximatives des constantes dans des expériences d'étalonnage combinées et choisies à cette fin, et de ne plus les corriger dans les observations proprement dites.

En agissant autrement, on se bute à des complications si grandes qu'elles défient les meilleures volontés.

Tout ce qui précède s'applique évidemment aux clichés photographiques, avec cette seule différence que les fils sont remplacés par deux axes tracés sur chaque cliché, et les mesures micrométriques m_1 et m_2 par des mesures analogues effectuées directement sur le cliché (1).

---

(1) Certains instruments, au lieu d'avoir deux micromètres perpendiculaires, sont munis d'un micromètre tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan réticulaire.

Le fil longitudinal F représente le rayon vecteur et ses déplacements angulaires autour du point O sont indiqués par un cercle gradué muni d'un vernier.

Le fil transversal f, perpendiculaire au précédent, est déplacé à l'aide de la vis micrométrique. Cette vis indique donc théoriquement des longueurs proportionnelles à Om.

Si l'on désigne par ρ et ω les coordonnées polaires du point m, par v la lecture au vernier et par m l'indication du micromètre, on devrait avoir

$$\rho = Km$$
$$\omega = v.$$

Si l'on veut tenir compte des petites imperfections possibles de l'instrument, on peut considérer le cas où le fil F passerait à une petite distance de l'origine O, et diviser le cercle en une série de régions linéaires.

Dans chaque région on a

$$\omega = a + bv.$$

Si on désigne par O′ le pied de la plus courte distance entre le point O et le fil F, on a

$$O'm = a_1 + b_1 m.$$

En désignant par c_1 la distance OO′, on a

$$\rho^2 = c^2_1 + (O'm)^2$$

4° Par suite de l'immense distance des astres, les droites qui joignent un point céleste quelconque, M, aux divers points d'un instrument ou même aux points voisins sont sensiblement parallèles. On peut donc prendre arbitrairement un point F sur l'instrument ou dans le voisinage et admettre que les droites joignant un point céleste quelconque M à n'importe quel point de l'instrument sont parallèles à FM.

Nous donnerons au point F ainsi choisi le nom de *pôle* d'un instrument astronomique.

21. Lignes de visée et coordonnées primaires d'une lunette astronomique. — La ligne de visée correspondant à un point m (ξ, η) du champ réticulaire est la droite menée par le pôle F, parallèlement à la direction ayant le point m (ξ, η) pour foyer conjugué.

Lorsque les rayons lumineux, issus d'un point extérieur M, convergent en m et y produisent une image, ces rayons sont sensiblement parallèles à la susdite direction et aussi à la droite joignant le pôle F au point M.

Pour faire passer la ligne de visée correspondant à un point réticulaire m (ξ, η) par un point extérieur éloigné M, il suffit donc de placer la lunette de manière que ce point extérieur forme une image en m.

La ligne de visée *principale* est la ligne de visée correspondant au point $(\xi = 0, \eta = 0)$.

Cette ligne de visée principale doit être définie avec rigueur pour chaque instrument astronomique, afin qu'il soit possible de déterminer les constantes qui figurent dans les relations suivantes, déjà rencontrées plus haut

$$\xi = a_1 + b_1 m_1 + c_1 m_2,$$
$$\eta = a_2 + b_2 m_1 + c_2 m_2.$$

Ces constantes étant déterminées, la ligne de visée principale correspond à la croisée des fils micrométriques annulant ξ et η, c'est-à-dire qu'à la croisée

$$m_1 = \frac{(c_1, a_2)}{(b_1, c_2)},$$
$$m_2 = \frac{(a_1, b_2)}{(b_1, c_2)}.$$

---

et, par suite, en supprimant le carré c^2_1,

$$\rho^2 = (O'm)^2 = (a_1 + b_1 m)^2,$$
$$\rho = a_1 + b_1 m.$$

L'emploi de l'instrument exige donc la détermination des quatre constantes a, b, a_1 et b_1.

Le problème se simplifie si l'on désire faire abstraction des erreurs du cercle gradué et ranger, par suite, ces erreurs dans la catégorie des erreurs inévitables d'observation.

Il est visible en effet que le rayon vecteur Om fait un angle constant avec $O'm$.

La première formule se réduit donc à la relation

$$\omega = a + v$$

le cercle, et il n'y a plus que les trois erreurs a, a_1 et b_1.

Nous entendons par axes *primaires* et nous désignons par $O_1X_1Y_1Z_1$, un système invariablement lié au corps de la lunette et placé comme nous l'expliquons ci-après.

L'origine O_1 est choisie arbitrairement sur la ligne de visée principale.

L'axe O_1X_1 est placé sur cette ligne.

Les axes O_1Y_1 et O_1Z_1 reçoivent des directions perpendiculaires à O_1X_1 et qui doivent être indiquées avec précision pour chaque instrument.

Il résulte des définitions ci-dessus que le pôle F est situé sur l'axe O_1X_1 et a, par suite, des coordonnées y_1 et z_1 égales à zéro.

La coordonnée x_1 du pôle F est la longueur O_1F. Nous la désignerons par la lettre F. Si nous avions exclusivement en vue des lunettes astronomiques, nous pourrions évidemment faire coïncider le pôle F, point arbitraire, avec l'origine O_1.

Nous l'avons distingué de cette origine pour que les formules relatives aux lunettes astronomiques soient les mêmes que celles des lunettes topographiques dans lesquelles le pôle F et l'origine O_1 sont généralement des points distincts.

22. Équations primaires des lignes de visée astronomiques. — Puisque toutes les lignes de visée passent par le pôle F, ces lignes ont des équations de la forme

$$\begin{cases} y_1 = p(x_1 - F), \\ z_1 = q(x_1 - F), \end{cases}$$

dans lesquelles les quantités p et q dépendent des coordonnées réticulaires ξ, η qui déterminent le point m définissant chaque ligne de visée.

Quelles que soient les relations existant entre p, q, ξ et η, on peut toujours diviser le champ réticulaire en une suite de régions $\{(\xi_0 - \epsilon), (\xi_0 + \epsilon)\}$, $\{(\eta_0 - \epsilon), (\eta_0 + \epsilon)\}$ telles qu'en donnant à ξ et à η deux valeurs quelconques comprises dans une de ces régions, on ait des relations linéaires

$$p = p_0 + A\xi + B\eta,$$
$$q = q_0 + M\xi + N\eta.$$

Pour pouvoir effectuer des observations au moyen d'un instrument, on devrait à la rigueur ranger dans la catégorie des inconnues intervenant dans ces observations, les constantes p_0, q_0, A, B, M et N. Dans la pratique on procède autrement.

On détermine généralement ces constantes dans des expériences préparatoires, ainsi que les régions du champ réticulaire, et on en adopte les valeurs finales dans les observations proprement dites.

On commence toujours par essayer de trouver des constantes convenant à tout le champ réticulaire. C'est seulement en cas d'insuccès qu'on doit se décider à subdiviser ce champ en régions.

La méthode que nous avons exposée dans notre Théorie des erreurs

sous le nom de *méthode de l'approximation minimum* s'impose dans les opérations de l'espèce.

Dans les questions où l'on doit s'occuper des coordonnées polaires α_1 et δ_1 des lignes de visée, il y a lieu de tenir compte des relations

$$p = \operatorname{tang} \alpha_1,$$
$$q = \operatorname{tang} \delta_1 \sec \alpha_1.$$

On pourrait calculer exactement α_1 et δ_1 au moyen de ces formules. Seulement, comme les lignes de visée sont toujours voisines de O_1X_1, on peut développer les seconds membres ci-dessus en séries limitées aux termes du premier degré. Il vient ainsi

$$\alpha_1 = p, \qquad \delta_1 = q,$$

et on a, par suite,

$$\alpha_1 = p_0 + A\xi + B\eta,$$
$$\delta_1 = q_0 + M\xi + N\eta.$$

Les constantes p_0 et q_0 sont les valeurs que prennent α_1 et δ_1 pour $\xi = 0$, $\eta = 0$. Les équations

$$y_1 = p_0 (x_1 - F),$$
$$z_1 = q_0 (x_1 - F)$$

sont donc celles de la ligne de visée principale, définie par l'origine des coordonnées réticulaires. Adoptons ce point pour point du plan réticulaire définissant la ligne de visée à laquelle appartient l'axe des x. Les équations de cette ligne de visée doivent être $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, et par conséquent

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = 0,$$

d'où, pour les coordonnées polaires α_1, δ_1, les expressions

$$\alpha_1 = A\xi + B\eta,$$
$$\delta_1 = M\xi + N\eta.$$

23. Lunette topographique et géodésique. — La lunette topographique et géodésique est employée pour viser des points dont la distance à l'objectif peut varier de quelques mètres à plusieurs kilomètres.

Il est donc nécessaire de donner au réticule un mouvement d'avant en arrière, afin de pouvoir amener les fils en coïncidence avec des images m se formant à diverses distances de l'objectif.

A cette fin le réticule est logé dans un tube cylindrique (tube porte-réticule) dont l'axe est celui du corps de la lunette (tube porte-objectif) et par rapport auquel l'opérateur peut lui donner un mouvement de translation. On sait en quoi consiste, dans chaque observation, la mise au point du réticule par rapport à l'image du point visé. On sait aussi en quoi consiste, pour chaque opérateur, la mise au point de l'oculaire par rapport au réticule.

Lorsque le réticule se meut d'avant en arrière, chaque point a du champ

réticulaire décrit une droite, *d*, parallèle aux génératrices de la surface cylindrique externe du tube porte réticule. Pendant ce mouvement le point extérieur M dont l'image *m* coïncide avec *a* décrit une droite D passant par le point F du plan focal conjugué à la direction des susdites génératrices.

La droite extérieure D est la ligne de visée correspondant au point *a*, parce qu'il suffit évidemment de faire coïncider l'image *m* d'un point extérieur M avec *a* pour faire passer la droite D par ce point extérieur.

Le réticule d'une lunette topographique comprend au moins deux fils croisés $o\xi$ et $o\eta$. Généralement il comprend encore deux fils parallèles à $o\xi$. Il y a donc trois points réticulaires *o*, *o'* et *o''* et, par suite, trois lignes de visée passant par le point F.

Nous donnons à ce point le nom de *pôle* et à la ligne D définie par le point *o* le nom de *ligne de visée principale*. En prenant l'origine O_1 des axes primaires $O_1X_1Y_1Z_1$ sur la ligne de visée principale et l'axe O_1X_1 sur cette ligne, comme pour la lunette astronomique, et, en désignant les distances *oo'* et *oo''* respectivement par η' et η'', nous obtenons les équations des trois lignes de visée en faisant $\xi = 0$ dans les équations des lignes de visée astronomiques. Nous obtenons ainsi

$$y_1 = 0, \qquad z_1 = 0$$

pour la ligne de visée principale, et

$$y_1 = B\eta'(x_1 - F), \qquad z_1 = N\eta'(x_1 - F),$$
$$y_1 = B\eta''(x_1 - F), \qquad z_1 = N\eta''(x_1 - F)$$

pour les deux autres lignes de visée.

On peut évidemment définir l'axe O_1Z_1 par la condition $N = 0$.

De cette manière les trois lignes de visée se trouvent, par définition, dans le plan $O_1X_1Y_1$ et leurs équations se réduisent à

$$y_1 = 0,$$
$$y_1 = B\eta'(x_1 - F),$$
$$y_1 = B\eta''(x_1 - F).$$

CHAPITRE III

DES INSTRUMENTS BINAIRES

24. Définition. — Nous donnons le nom d'*instrument binaire* à l'ensemble formé par un instrument primaire tournant autour d'un axe de rotation théoriquement perpendiculaire à l'axe O_1X_1 de l'instrument primaire.

Lorsque l'instrument binaire est complet, il possède un cercle gradué concentrique à l'axe de rotation et permettant d'évaluer les déplacements angulaires de l'instrument primaire autour de cet axe.

Un instrument binaire peut former un tout distinct. Il en est ainsi pour le niveau topographique, le sextant, le cercle méridien, le cercle mural, etc... L'instrument binaire peut aussi faire partie d'un instrument plus complet. Il en est ainsi du cercle vertical du théodolite, de celui du tachéomètre ou de la boussole nivelante, du cercle de déclinaison de l'équatorial, etc.

Nous avons choisi le nom d'instrument *binaire* parce que nous considérerons, outre les axes primaires $O_1X_1Y_1Z_1$ invariablement liés au viseur, un second système $O_2X_2Y_2Z_2$, dont la direction positive O_2Z_2 coïncide avec l'axe de rotation autour duquel tourne l'instrument primaire.

25. Axes coordonnés d'un instrument binaire. — Avant d'exposer ce qui concerne le choix des axes coordonnés d'un instrument binaire nous tenons à mettre le lecteur en garde contre une objection qui se présenterait vraisemblablement à son esprit si nous ne la prévenions pas.

Notre but est d'exposer une théorie des instruments binaires applicables à tous les instruments existants ou imaginables, une théorie qui tienne compte de toutes les imperfections possibles et permette de les corriger.

On ne doit évidemment pas exiger d'une théorie de cette envergure d'être d'une lecture facile n'exigeant aucun effort intellectuel. Il suffit que les résultats auxquels cette théorie conduit soient appropriés aux besoins de la pratique, et, à ce dernier point de vue, nous pouvons affirmer qu'il est impossible de trouver des résultats plus simples que les nôtres.

La même remarque s'applique à l'étude que nous ferons dans le chapitre suivant des instruments ternaires. Nous n'y reviendrons plus dans ce chapitre.

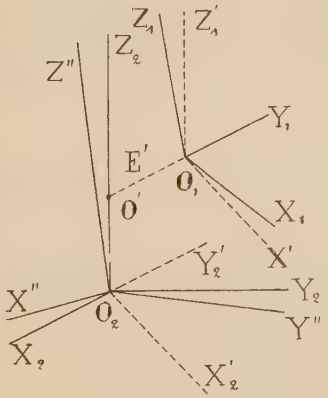


Fig. 5

Les éléments géométriques à reconnaître dans un instrument binaire sont au nombre de huit (fig. 5). Ces éléments doivent être envisagés dans l'ordre ci-après : 1° la direction indéfinie de l'axe binaire O_2Z_2, 2° l'origine binaire O_2, 3° la direction indéfinie de l'axe primaire O_1X_1, 4° l'origine primaire O_1, 5° l'axe primaire O_1Y_1, 6° l'axe primaire O_1Z_1, 7° l'axe binaire O_2X_2, 8° l'axe binaire O_2Y_2.

La direction indéfinie de l'axe O_2Z_2 coïncide avec l'axe de rotation autour duquel tourne la lunette. S'il y a deux axes de rotation dans un instrument dont l'instrument binaire fait partie, l'axe O_2Z_2 est celui auquel la lunette est invariablement liée. L'origine binaire O_2 doit être définie pour chaque instrument en particulier. Tout ce que nous avons à en dire pour le moment c'est qu'on le place habituellement au point milieu de l'axe de rotation dans les

instruments binaires isolés, lorsqu'on se propose d'effectuer le retournement de cet axe sur lui-même pour certaines vérifications : de cette manière le point O_2 reste le même après le retournement.

La direction indéfinie de O_1X_1 coïncide avec la ligne de visée principale. L'origine primaire O_1 est le pied de la perpendiculaire $O'O_1$ commune à l'axe de rotation O_2Z_2 et à cette ligne de visée principale O_1X_1. Nous en désignerons la longueur par E'. Nous désignerons par E'' la distance O_2O'.

L'axe primaire O_1Y_1 est placé sur la perpendiculaire commune $O'O_1$.

L'axe primaire O_1Z_1 est évidemment perpendiculaire à $O_1X_1Y_1$. Dans un instrument parfait l'axe O_1Z_1 coïncide avec la droite O_1Z' menée par le point O_1 parallèlement à O_2Z_2, et l'axe O_1X_1 coïncide avec la droite O_1X' menée par le point O_1 perpendiculairement au plan O_1Y_1Z'. Dans les instruments matériels au contraire les axes O_1Z_1 et O_1X_1 s'écartent de leurs positions théoriques respectives O_1Z' et O_1X', et ce sont là des imperfections que nous aurons à corriger par le calcul.

Les personnes non prévenues et les débutants s'imaginent toujours que les axes $O_2X_2Y_2$ sont les rayons du cercle gradué concentrique à l'axe de rotation et qui passent respectivement par les graduations égales à zéro et à 1 *droit*. On pourrait certes choisir les axes $O_2X_2Y_2$ de cette manière, mais ils seraient rarement appropriés ainsi aux exigences de la pratique.

En tenant compte de ces exigences, il convient de prendre pour axe O_2X_2 la parallèle menée par le point O_2 à la direction que prend O_1X', au moment où on lit *zéro* à la ligne de foi du cercle gradué concentrique à O_2Z_2.

L'axe O_2Y_2 est parallèle à la direction que prend O_1X' au moment où on lit + 1 *droit*. De cette manière, la lecture l au cercle gradué, dans chaque position de l'instrument, est l'angle de position binaire, α_2, de la direction O_1X'.

26. Formules générales. — Le problème à résoudre consiste à trouver les équations des lignes de visée par rapport aux axes binaires $O_2X_2Y_2Z_2$, connaissant la lecture l au cercle gradué, les quantités ξ et η fixant l'image du point visé dans le champ réticulaire, et les constantes de l'instrument. Ces constantes sont les quantités $E' = O'O_1$, $E'' = O_2O'$ et les angles égaux X_1O_1X' et Z_1O_1Z', ou les angles contraires $X'O_1X_1$ et $Z'O_1Z_1$. Pour éviter toute confusion à ce sujet nous considérons l'angle de pente $X'OX_1$ de O_1X_1 dans le système $O_1X'Y_1Z'$, nous désignerons cet angle par la lettre c, et nous le nommerons, conformément à l'usage, l'*erreur de collimation* ou la *collimation*.

Les équations d'une ligne de visée quelconque ont été déterminées par rapport aux axes primaires $O_1X_1Y_1Z_1$ et sont

$$y_1 = (A\xi + B\eta)(x_1 - F),$$
$$z_1 = (M\xi + N\eta)(x_1 - F).$$

Il suffit donc de chercher les formules de transformation pour passer des axes primaires $O_1X_1Y_1Z_1$ aux axes binaires $O_2X_2Y_2Z_2$, et l'on voit ainsi que si les conventions énoncées dans le numéro précédent exigent un peu d'attention, la résolution du problème général des instruments binaires en découle avec la plus grande facilité.

Nous examinerons le cas où les directions $O_1X_1Y_1Z_1$ ont été choisies de manière que les systèmes $O_1X_1Y_1Z_1$ et $O_1X'Y'Z'$ soient superposables au système $O_2X_2Y_2Z_2$. De plus, nous ferons usage de deux axes auxiliaires $O_2X'_2Y'_2$ respectivement parallèles à $O_1X'Y_1$. Puisque l'angle de position de O_1X' est égal à la lecture l au cercle gradué, il en est de même de l'angle de position de sa parallèle $O_2X'_2$. Par conséquent, si nous désignons les coordonnées polaires binaires par ρ_2, α_2, δ_2 et les coordonnées polaires relatives à $O_2X'_2Y'_2Z_2$ par ρ'_2, α'_2, δ'_2 les formules de transformations entre ces deux systèmes se réduisent à

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho'_2, \\ \alpha_2 = \alpha'_2 + l, \\ \delta_2 = \delta'_2. \end{cases}$$

Les formules pour passer de $O_1X_1Y_1Z_1$ à $O_1X'Y_1Z'$, en coordonnées rectangulaires, sont

$$\begin{aligned} x' &= x_1 \cos c - z_1 \sin c, \\ z' &= x_1 \sin c + z_1 \cos c, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

En désignant les coordonnées polaires correspondantes par ρ', α', δ' et ρ_1, α_1, δ_1, on a d'abord $\rho' = \rho_1$. En posant ensuite $\alpha' = \alpha_1 + h$, $\delta' = \delta_1 + k$, et en remplaçant les coordonnées rectangulaires par les polaires, et les fonctions de c, h, k par leurs développements en séries limités aux termes du premier degré, on obtient :

$$\begin{cases} \rho' = \rho_1, \\ \alpha' = \alpha_1 + c \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_1, \\ \delta' = \delta_1 + c \cos \alpha_1. \end{cases}$$

Il reste à passer des axes $O_1X'Y_1Z'$ aux axes parallèles $O_2X'_2Y'_2Z_2$. Ce problème est une question de parallaxe dans laquelle les coordonnées définitives de l'origine provisoire sont (0, E′, E″). Nous avons ainsi

$$\begin{cases} \rho'_2 = \rho' + \mathrm{E}' \sin \alpha' \cos \delta' + \mathrm{E}'' \sin \delta', \\ \alpha'_2 = \alpha' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\rho'} \cos \alpha' \sec \delta', \\ \delta'_2 = \delta' - \dfrac{\mathrm{E}'}{\rho'} \sin \alpha' \sin \delta' + \dfrac{\mathrm{E}''}{\rho'} \cos \delta'. \end{cases}$$

En éliminant ρ'_2, α'_2, δ'_2, ρ', α', δ', on obtient finalement :

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho_1 + E' \sin(\alpha_1 + c \sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1) \cos(\delta_1 + c\cos\alpha_1) + E'' \sin(\delta_1 + c\cos\alpha_1), \\ \alpha_2 = l + \alpha_1 + c\sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1 + \dfrac{E'}{\rho_1} \cos(\alpha_1 + c\sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1) \sec(\delta_1 + c\cos\alpha_1), \\ \delta_2 = \delta_1 + c\cos\alpha - \dfrac{E'}{\rho_1} \sin(\alpha_1 + c\sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1) \sin(\delta_1 + c\cos\alpha_1) + \\ \qquad + \dfrac{E''}{\rho_1} \cos(\delta_1 + c\cos\alpha_1). \end{cases}$$

Si l'on s'en tient au cas où les quantités $\dfrac{E'}{\rho_1}$ et $\dfrac{E''}{\rho_1}$ sont telles qu'on peut en négliger les produits par les termes du premier degré en c, ξ et η, ainsi que les puissances supérieures de c, ξ et η, si l'on tient compte en outre des relations

$$\alpha_1 = A\xi + B\eta,$$
$$\delta_1 = M\xi + N\eta.$$

démontrées pour les instruments primaires, les formules ci-dessus se simplifient et deviennent

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho_1, \\ \alpha_2 = l + A\xi + B\eta + \dfrac{E'}{\rho_1}, \\ \delta_2 = M\xi + N\eta + c + \dfrac{E''}{\rho_1}. \end{cases}$$

Dans le cas des observations astronomiques ρ_1 a des valeurs immenses, et l'on a

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho_1, \\ \alpha_2 = l + A\xi + B\eta, \\ \delta_2 = M\xi + N\eta + c. \end{cases}$$

Dans les observations topographiques ξ est nul et l'on a

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho_1, \\ \alpha_2 = l + B\eta + \dfrac{E'}{\rho_1}, \\ \delta_2 = N\eta + c + \dfrac{E''}{\rho_1}. \end{cases}$$

Pour la ligne de visée principale on a $\eta = 0$, et par suite

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho_1, \\ \alpha_2 = l + \dfrac{E'}{\rho_1}, \\ \delta_2 = c + \dfrac{E''}{\rho_1}. \end{cases}$$

Remarque. — Il est facile de démontrer directement les formules ci-dessus par des raisonnements approximatifs élémentaires. Mais on ignore ainsi quel est le degré de précision des résultats, et on ignore surtout comment on devrait opérer dans les questions de haute précision où l'on doit pousser la rigueur à l'extrême.

La marche que nous avons suivie est applicable à tous les cas. On peut y évaluer l'importance des quantités que l'on a négligées dans les développements en séries, et s'en tenir aux formules exactes dans les cas où ces quantités sont supérieures aux plus fortes erreurs que l'on désire tolérer.

27. Correction des positions défectueuses de l'instrument. — Il peut y avoir lieu de tenir compte des erreurs provenant d'une position défectueuse de l'instrument. Ceci ne se fait que dans les travaux de précision. Dans les autres cas, on considère les erreurs provenant d'une position défectueuse de l'instrument comme des erreurs d'observation inévitables. Ces corrections équivalent au passage de l'un à l'autre de deux systèmes d'axes rectangulaires et superposables. Ces systèmes sont constitués respectivement par les axes $O_2X_2Y_2Z_2$ liés à l'instrument et par rapport auxquels celui-ci a été étudié, et les axes $O_2X''Y''Z''$ que devraient théoriquement occuper ces axes instrumentaux. De plus, par nature de la question, ces deux systèmes présentent la particularité d'être *voisins*.

Dans cette transformation d'axes, au cours de laquelle l'origine ne change pas, nous ferons usage, comme constantes de la transformation, de trois angles que nous avons introduits dans notre enseignement de l'Astronomie, et qui se montrent préférables, dans les questions pratiques, aux angles d'Euler, habituellement employés. Par ces angles A′, B′, C′, les formules de passage d'un système (x, y, z) à un système (x', y', z') sont

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos A' \cos B' + y \sin A' \cos B' + z \sin B',\\
y' &= x(-\sin A' \cos C' - \cos A' \sin B' \sin C') +\\
&\quad y(\cos A' \cos C' - \sin A' \sin B' \sin C') + z \cos B' \sin C',\\
z' &= x(\sin A' \sin C' - \cos A' \sin B' \cos C') +\\
&\quad y(-\cos A' \sin C' - \sin A' \sin B' \cos C') + \cos B' \cos C'.
\end{aligned}$$

Nous rappelons en note, à la fin de ce numéro, la démonstration de ces formules.

Nous n'aurons à utiliser ici ces formules que dans l'hypothèse d'axes voisins, c'est-à-dire dans l'hypothèse d'angles A′, B′, C′ qui soient petits, ayant des mesures (en radians) dont les carrés et puissances supérieures soient négligeables. Les formules de transformation se réduisent alors à

$$\begin{aligned}
x' &= x + A'y + B'z,\\
y' &= -A'x + y + C'z,\\
z' &= -Bx' - Cy' + z',
\end{aligned}$$

ou

$$x = x' - A'y' - B'z',$$
$$y = A'x' + y' - C'z',$$
$$z = B'x' + C'y' + z'.$$

A la même approximation, les formules de transformation des coordonnées polaires (α, δ) et (α', δ') sont

$$\alpha' = \alpha + A' + (B' \sin\alpha + C' \cos\alpha) \operatorname{tg} \delta,$$
$$\delta' = \delta + B \cos\alpha + C \sin\alpha.$$

Appliquons ces formules aux instruments binaires. Soient (α'', δ'') les coordonnées polaires de la direction du point visé par rapport aux axes binaires théoriques $O_2X''Y''Z''$. Le rôle de α est joué par $(l + A\xi + B\eta)$ dont la partie principale est l, et le rôle de δ est joué par $(M\xi + N\eta + c)$; à la même approximation,

$$\alpha'' = l + A\xi + B\eta + A',$$
$$\delta'' = M\xi + N\eta + c + B' \cos l + C' \sin l.$$

Si on voulait, dans des circonstances exceptionnelles, corriger les indications d'un instrument topographique ($\xi = 0$, $\eta = 0$) on aurait

$$\alpha'' = l + A' + \frac{E'}{\rho_1},$$
$$\delta'' = c + \frac{E''}{\rho_1} + B' \cos l + C' \sin l. \ (^1)$$

---

(1) Dans le texte ci-dessus, les paramètres de la transformation ont été désignés par des lettres accentuées pour éviter toute confusion avec les lettres A, B déjà employées. Dans cette note, cette confusion n'est pas à craindre.

Considérons deux systèmes superposables OXYZ et O'X'Y'Z', et désignons par A, B les coordonnées polaires de l'axe OX' par rapport à OXYZ (fig. *a*).

Désignons par OX_1 l'extrémité de l'angle de position A de OX_1. Faisons tourner les axes OXY d'un angle A autour de OZ, de manière à amener OX en OX_1, et désignons par OY_1 la position que vient occuper OY à la suite de cette rotation. Nous avons :

$$x = x_1 \cos A - y_1 \sin A,$$
$$y = x_1 \sin A + y_1 \cos A.$$

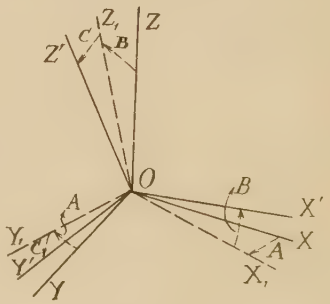


FIG. *a*

Faisons tourner ensuite X_1OZ autour de OY_1 d'un angle B de manière à amener OX_1 en OX', et désignons par OZ_1 la nouvelle position que vient occuper OZ par suite de cette rotation. Nousavons :

$$x_1 = x' \cos B - z' \sin B,$$
$$z = x' \sin B + z' \cos B'.$$

L'angle C, troisième paramètre de la transformation, est l'angle Y_1OY' dont on doit

CHAPITRE IV

DES INSTRUMENTS TERNAIRES

28. Définition. — Nous donnons le nom d'instrument ternaire à l'ensemble formé par un instrument binaire rapporté à un système ternaire $O_3X_3Y_3Z_3$ dont l'axe O_3Z_3 est théoriquement perpendiculaire à l'axe binaire O_2Z_2.

En général l'instrument binaire peut tourner autour de l'axe O_3Z_3 et un cercle gradué concentrique à cet axe permet d'évaluer les déplacements angulaires de l'instrument binaire autour de O_3Z_3. Il en est ainsi dans les théodolites, les tachéomètres, les équatoriaux, etc.

Mais il peut se faire aussi que l'instrument binaire soit immobile par rapport au système ternaire $O_3X_3Y_3Z_3$. Il en est ainsi notamment pour le cercle méridien, la lunette méridienne et le cercle mural qui sont des instruments binaires comprenant des axes $O_1X_1Y_1Z_1$ et $O_2X_2Y_2Z_2$ et occupant une position invariable par rapport à un système $O_3X_3Y_3Z_3$ dont l'axe O_3Z_3 est dirigé vers le pôle boréal de la sphère céleste et dont les axes $O_3X_3Y_3$ sont situés dans l'équateur de cette sphère.

29. Axes coordonnés ternaires. — La direction indéfinie de l'axe ternaire O_3Z_3 coïncide éventuellement avec le pivot autour duquel tourne l'instrument binaire (fig. 6).

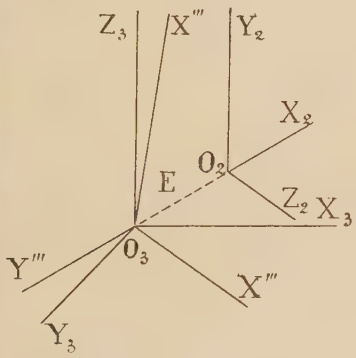


FIG. 6.

Dans les cas où cet instrument binaire est immobile, on doit définir exactement l'emplacement de l'axe indéfini O_3Z_3. En général on pourra le faire passer par un point arbitraire O_3 de l'axe binaire O_2X_2.

Les origines O_2 et O_3 sont les pieds de la plus courte distance entre l'axe O_3Z_3 et l'axe de rotation O_2Z_2 de l'instrument binaire. Nous désignerons cette plus courte distance par E. L'axe O_2X_2 coïncide avec cette plus courte distance E, la position théorique de l'axe O_2Y_2 est parallèle à O_3Z_3, et la position théorique de l'axe O_2Z_2 est perpendiculaire au plan $O_2X_2Y_2$.

L'axe O_3X_3 est parallèle à la direction que prend O_2X_2 au moment où le

---

faire tourner OY_1Z_1 autour de OX' pour amener OY_1 en OY' et, par suite, OZ_1 en OZ' :

$$y_1 = y' \cos C - z' \sin C,$$
$$z_1 = y' \sin C + z' \cos C.$$

En éliminant x_1, y_1 et z_1 entre les six relations ci-dessus, nous obtenons les formules de transformation écrites dans le texte (sauf l'accentuation des lettres A, B, C).

cercle concentrique à O_3Z_3 marque zéro. L'axe O_3Y_3 est parallèle à la direction que prend O_2X_2 au moment où le même cercle marque + 1 *droit*.

De cette manière l'indication de ce cercle — désignons la par L — est l'angle de position de la direction O_2X_2 dans toutes les positions données à l'instrument binaire.

30. Formules générales — Nous avons vu précédemment que les coordonnées binaires exactes peuvent être calculées par les formules

$$\rho_2 = \rho_1,$$
$$\alpha_2 = l + A' + \frac{E'}{\rho_1} + A\xi + B\eta,$$
$$\delta_2 = c + \frac{E''}{\rho_1} + M\xi + N\eta + B' \cos l + C' \sin l.$$

Il suffit donc de passer du système binaire exact $O_2X_2Y_2Z_2$ représenté sur le croquis, au système ternaire $O_3X_3Y_3Z_3$.

Remarquons, à cet effet, que les coordonnées x_3, y_3, z_3 d'un point quelconque M sont les projections sur les axes ternaires du vecteur O_3M. Remarquons en outre que ce vecteur a pour composantes O_3O_2, x_2, y_2 et z_2. Remarquons enfin que les coordonnées polaires ternaires de $O_3O_2X_2$ sont L et 0, et que les coordonnées polaires ternaires de O_2Z_2 sont $L \pm \frac{\pi}{2}$ et 0.

Sur le croquis nous avons représenté le cas $L + \frac{\pi}{2}$.

Nous avons donc :

$$\begin{cases} x_3 = (E + x_2) \cos L \mp z_2 \sin L, \\ y_3 = (E + x_2) \sin L \pm z_2 \cos L, \\ z_3 = y_2. \end{cases}$$

Pour déduire de ces formules les coordonnées polaires qui nous intéressent plus spécialement au point de vue pratique, posons $\alpha_2 = l + u$, $\delta_2 = v$, et remarquons que u et v, dont les valeurs exactes peuvent être déduites des trois formules rappelées plus haut, sont du premier degré par rapport aux quantités A', $\frac{E'}{\rho_1}$, ξ, η, c, $\frac{E''}{\rho_1}$, B' et C' dont nous conservons seulement les termes du premier degré dans les développements en séries qui s'y prêtent.

Si l'on remplace les coordonnées rectangulaires par les coordonnées polaires, les formules ci-dessus deviennent :

$$\rho_3 \cos \alpha_3 \cos \delta_3 = \rho_1 \cos v \cos L \cos (l + u) + E \cos L \mp \rho_1 \sin v \sin L,$$
$$\rho_3 \sin \alpha_3 \cos \delta_3 = \rho_1 \cos v \sin L \cos (l + u) + E \sin L \pm \rho_1 \sin v \cos L,$$
$$\rho_3 \sin \delta_3 = \rho_1 \cos v \sin (l + u).$$

On pourrait développer, à l'aide de ces formules, ρ_3, α_3 et δ_3 en séries par rapport aux petites variables E, u et v.

Seulement, nous remarquons qu'en remplaçant $\rho_1 \cos v$ par ρ_1 et en posant $L = \alpha_1$, $(l + u) = \delta_1$,

$$E \cos L \pm \rho_1 \sin v \sin L = x_o, \quad E \sin L \pm \rho_1 \sin v \cos L = y_o$$

et $0 = z_o$, (x_o, y_o, z_o) étant les coordonnées définitives de l'origine provisoire, on rend ces formules identiques aux formules de parallaxe. On peut donc calculer les parallaxes de ρ_3, α_3 et δ_3 :

$$\rho_3 = \rho_1 \cos v + E \cos (l + u) = \rho_1 + E \cos l,$$
$$\alpha_3 = L + \operatorname{tg} v \sec (l + u) = L + v \sec l,$$
$$\delta_3 = l + u - \frac{E \sin (l + u)}{\rho_1 \cos v} = l + u - \frac{E}{\rho_1} \sin l.$$

En remplaçant u et v par leurs valeurs, on trouve

$$\begin{cases} \rho_3 = \rho_1 + E \cos l, \\ \alpha_3 = L + \left(c + \dfrac{E''}{\rho_1} + M\xi + N\eta + B' \cos l + C' \sin l \right) \sec l, \\ \delta_3 = l + A' + \dfrac{E'}{\rho_1} + A\xi + B\eta - \dfrac{E}{\rho_1} \sin l. \end{cases}$$

31. Correction des positions défectueuses. — Les formules que nous venons de trouver s'appliquent au cas où les axes $O_3X_3Y_3X_3$ occupent exactement leurs positions théoriques $O_3X'''Y'''Z'''$.

Lorsqu'ils s'en écartent et que l'on peut s'en tenir aux formules permettant d'arrêter les développements en séries aux termes du premier degré, on a des relations de la forme suivante dans lesquelles A'', B'', C'' désignent les écarts constants correspondant aux axes ternaires :

$$\alpha''' = L + A'' + B' + \left(c + \frac{E''}{\rho_1} + M\xi + N\eta + C \sin l \right) \sec l + (B'' \sin L - C'' \cos L) \operatorname{tg} l,$$
$$\delta''' = l + A' + \frac{E'}{\rho_1} + A\xi + B\eta - \frac{E}{\rho_1} \sin l + B' \cos L + C'' \sin L.$$

CHAPITRE V

APPLICATION DES FORMULES GÉNÉRALES AUX INSTRUMENTS MÉRIDIENS

32. Description. — Les instruments méridiens sont des instruments astronomiques binaires dont l'axe théorique O_3Z'' est dirigé dans le sens horizontal est-ouest. On les appelle des instruments méridiens parce que la ligne de visée principale décrirait le plan méridien si l'instrument était parfait et parfaitement installé.

L'instrument binaire méridien est généralement rapporté à un système ternaire $O_3X'''Y'''Z'''$ zénithal ou équatorial (fig. 7).

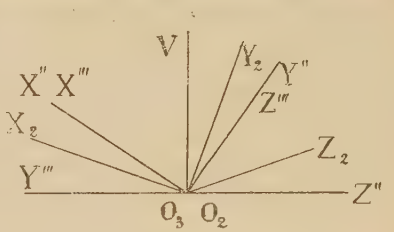


Fig 7

Nous traiterons ce second cas ; l'axe O_3Z''' correspondant à ce cas est dirigé vers le pôle boréal de la sphère céleste.

L'axe O_3X''' est situé dans le plan vertical passant par l'axe O_3Z''' et fait un angle aigu avec la direction zénithale O_3V issue du point O_3. On peut donc dire encore que O_3X''' se trouve dans le méridien supérieur du lieu O_3. L'axe horizontal O_3Y''' est pris du côté de l'ouest. Les axes binaires théoriques $O_2X''Y''Z''$ occupent les positions représentées sur le croquis ci-contre : O_2X'' coïncide avec O_3X''', O_2Y'' avec O_3Z''' et O_2Z'' avec la direction est opposée à O_3Y'''.

Les positions $O_2X_2Y_2Z_2$ diffèrent généralement très peu des axes théoriques $O_2X''Y''Z''$.

33. Formules générales. — Puisque les axes ternaires occupent leurs positions théoriques, les quantités que nous avons désignées par A'', B'', C' dans les dernières formules sont nulles. Les quantités ayant ρ_1 au dénominateur disparaissent dans les formules astronomiques. Enfin L est l'angle de position ternaire théorique de la direction O_2X'. Comme cette direction coïncide avec l'axe ternaire O_3X''' on a $L = 0$ ou $L = \pi$. Nous considérons le cas $L = 0$:

$$\begin{cases} \alpha''' = B' + (c + M\xi + N\eta + C' \sin l) \sec l, \\ \delta''' = l + A' + A\xi + B\eta. \end{cases}$$

Formules méridiennes. Pour les observations aux instruments méridiens on introduit dans les formules générales le temps sidéral t ou bien la fonction linéaire $a + b\theta$ qui donne t en fonction du temps θ fourni par une bonne pendule ou un bon chronomètre. On y introduit en outre l'ascension droite R et la déclinaison D fournies par les éphémérides pour les astres que l'on vise.

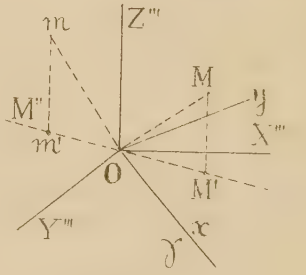


Fig. 8

Dans cette question on doit considérer deux cas selon que l'astre est observé dans le méridien supérieur ou dans le méridien inférieur ou, pour être plus exact, dans le voisinage de ces méridiens, puisque l'instrument n'est pas parfait.

1er cas. Observation d'un point M près du méridien supérieur. Désignons par $O_3X'''Y'''Z'''$ les axes ternaires équatoriaux auxquels est rapporté

l'instrument. Ces axes sont droitiers, dans la pratique, et fournissent l'angle horaire α''' et la déclinaison δ''' (fig. 8).

Désignons par O_3xyZ''' les axes correspondant à l'ascension droite et à la déclinaison. Ces axes sont gauchers, et la direction O_3x passe par le point vernal γ, dont l'angle horaire fournit l'heure sidérale.

Nous avons

$$X'''O_3M' = X'''O_3x + xO_3M'.$$

Cette formule peut être prise dans le sens droitier ou dans le sens gaucher. Dans le premier sens elle devient

$$\alpha''' = t - R = a + b\theta - R.$$

On a en outre

$$\delta''' = M'O_3M = D.$$

En introduisant ces valeurs de α''' et δ''' dans les formules générales, on obtient

$$a + b\theta - R = B' + (c + M\xi + N\eta + C' \sin D) \sec D,$$
$$D = l + A' + A\xi + B\eta.$$

2e cas. Observation d'un point M près du méridien inférieur. On a dans ce cas (fig. 8) :

$$X'''O_3M' = X'''O_3x + xO_3m' + m'O_3M'.$$

En prenant les angles dans le sens droitier et en désignant comme précédemment par R l'ascension droite fournie par les éphémérides :

$$\alpha''' = t - R \pm 12^h = a + b\theta - R \pm 12^h.$$

On a en outre

$$\delta''' = M'O_3m = 180^\circ - m'O_3m = 180^\circ - D.$$

En introduisant ces valeurs de α''' et δ''' dans les formules générales, on obtient :

$$a + b\theta - R \pm 12^h = B' - (c + M\xi + N\eta + C' \sin D) \sec D,$$
$$180^\circ - D = l + A' + A\xi + B\eta.$$

34. Détermination des constantes contenues dans les formules méridiennes. — Le seul procédé rationnel pour déterminer les constantes a, b, B', c, M, N, C', A', A et B contenues dans les formules méridiennes serait de considérer ces constantes comme des inconnues, d'effectuer le plus grand nombre possible d'observations, et de traiter les formules traduisant ces observations par les méthodes de la Théorie des erreurs : la méthode de l'approximation minimum, la méthode la plus approximative, ou la méthode quadratique la plus approximative dite des moindres

carrés. Ce procédé rationnel donnerait lieu à des calculs si laborieux dans ce cas-ci, par suite du grand nombre des inconnues, qu'aucune institution ne dispose du personnel nécessaire pour mener les calculs à bonne fin.

On est donc forcé d'avoir recours à des procédés empiriques expéditifs et notamment de s'occuper séparément des diverses constantes.

35. Coefficients de ξ et η. — *a) Réglage préliminaire.* Supposons qu'on vise une étoile quelconque en l'amenant sur l'axe réticulaire $o\xi$ et qu'on règle la position du réticule de manière que l'étoile se meuve sur cet axe $o\xi$ lorsque la lunette reste immobile.

Puisque la quantité η est nulle, la deuxième formule, par exemple dans le cas d'un passage supérieur, devient

$$D = l + A' + A\xi.$$

La coordonnée D reste constante puisqu'il s'agit d'une même étoile. Les quantités l et A' sont invariables, puisque l'instrument reste immobile. Par conséquent ξ varie seul dans la formule ci-dessus.

On a donc nécessairement $A = 0$.

b) Équations. Pendant que l'étoile se meut sur l'axe $o\xi$, on peut déterminer plusieurs valeurs de ξ et les valeurs correspondantes de θ.

Si on considère deux systèmes de valeurs quelconques (ξ', θ') et (ξ'', θ'') on a, en vertu de la première formule méridienne,

$$b(\theta' - \theta'') = M(\xi' - \xi'') \sec D.$$

Pour une étoile équatoriale, on a $D = 0$, $\sec D = 1$, et la formule devient

$$b(\theta' - \theta'') = M(\xi' - \xi'').$$

Cette équation permet seulement de déterminer le rapport $\frac{M}{b}$. Seulement, dans la pratique, b est généralement suffisamment voisin de 1 pour qu'on puisse prendre $M = \{(\theta' - \theta'') : (\xi' - \xi'')\}$.

Dans les cas où l'on veut faire une étude complète et approfondie d'un instrument on doit étudier la relation qui existe entre ξ et l'indication m fournie par le micromètre en tours et fractions de tour de vis. On doit tenir compte aussi de la température T. On peut poser à cet effet, par exemple,

$$\xi = \xi_0 + \xi' m + \xi'' T$$

et chercher à déterminer les constantes ξ_0, ξ' et ξ'' d'une manière satisfaisante.

Au besoin on peut adopter diverses constantes pour les diverses régions de la vis micrométrique et divers intervalles assignés à la température. Si cela ne suffit pas encore on doit avoir recours à d'autres formules permettant de déterminer ξ en fonction de m et T.

Il est impossible de donner des indications générales à ce sujet. Chaque cas concret doit être étudié séparément par des spécialistes compétents.

La même chose a lieu pour la détermination de η.

Nous supposerons dans la suite que ces questions soient élucidées et que l'on connaisse les quantités ξ et η correspondant à chaque observation.

On opère de même pour les coefficients N et B en ayant soin de viser aux moments où les étoiles passent sur l'axe $o\eta$ et où l'on a par suite $\xi = 0$.

36. Erreur du zéro. — L'instrument étant réglé comme nous l'avons expliqué, de manière qu'on ait $A = 0$, la deuxième formule méridienne se réduit à

$$D = l + A' + B\eta.$$

Lorsqu'on vise une étoile équatoriale en l'amenant sur l'axe $o\xi$, on a $D = 0$ et $\eta = 0$, et la formule ci-dessus devient

$$0 = l + A'.$$

La constante A' est donc la quantité qu'on doit ajouter à la lecture l au cercle gradué pour avoir la valeur exacte de D lorsque cette dernière est égale à zéro. C'est pourquoi on donne parfois à A' le nom d'erreur du zéro.

Ce terme est incorrect car A' est l'erreur de n'importe quelle autre lecture.

Quoiqu'il en soit on peut déterminer A' de diverses manières.

Si l'on peut viser une étoile connue en l'amenant sur l'axe $o\xi$, on a

$$D = l + A'$$

et, par suite,

$$A' = D - l.$$

Si l'étoile est inconnue et si on la vise à son passage supérieur, puis, 12 heures plus tard, à son passage inférieur, on a

$$D = l' + A',$$
$$180^\circ - D = l'' + A'.$$

On déduit de là

$$A' = \frac{180^\circ - (l' + l'')}{2}.$$

On peut profiter de la circonstance pour ajouter à ce résultat le suivant :

$$D = \frac{(l' - l'') + 180^\circ}{2}.$$

37. Détermination de la constante c par des collimateurs. — On appelle *collimateur* une lunette quelconque dont le centre réticulaire est placé dans le champ focal, et susceptible d'être éclairé.

Puisque le centre réticulaire est placé dans le champ focal, les rayons lumineux issus de ce centre sortent du côté de l'objectif sous forme d'un faisceau de rayons parallèles. Par conséquent si l'on pointe une lunette astronomique ou un autre collimateur sur l'objectif d'un collimateur dans une direction convenable, l'image du réticule éclairé de ce dernier collimateur vient se former dans le champ réticulaire de la lunette astronomique ou de l'autre collimateur.

Pour déterminer l'erreur constante c, dite erreur de collimation, on place deux collimateurs en face l'un de l'autre de part et d'autre de l'instrument méridien.

Une ouverture pratiquée dans l'axe de cet instrument permet de pointer les deux collimateurs l'un sur l'autre et de les régler de manière que le centre réticulaire de chaque collimateur coïncide avec l'image du centre réticulaire de l'autre, afin que les deux faisceaux correspondant aux deux instruments soient diamétralement opposés l'un à l'autre.

De cette manière, si P_1 et p_1 désignent les coordonnées polaires méridiennes de la ligne de visée de l'instrument méridien, dirigée vers un des collimateurs, les coordonnées polaires de la ligne de visée dirigée vers l'autre collimateur sont P_1 et $\pi + p_1$.

Si nous désignons par ξ_1 la valeur que prend ξ lorsqu'on vise le centre réticulaire d'un collimateur et par ξ_2 la valeur de ξ pour le centre réticulaire du second collimateur, nous avons, en vertu de la deuxième formule méridienne,

$$\begin{aligned} P_1 &= B' + (c + M\xi_1 + C' \sin l_1) \sec l_1, \\ p_1 &= l_1 + A' + A\xi_1, \\ P_1 &= B' + (c + M\xi_2 + C' \sin l_2) \sec l_2, \\ p_2 &= \pi + p_1 = l_2 + A' + A\xi_2. \end{aligned}$$

On déduit de là :

$$c = -\frac{M}{2}(\xi_1 + \xi_2).$$

On peut établir la même formule d'une manière plus simple en utilisant l'instrument méridien comme instrument binaire, sans s'occuper de sa position relativement aux axes ternaires et en faisant usage de la formule générale

$$\delta_2 = M\xi + N\eta + c.$$

On vise dans un premier collimateur de manière à amener l'image sur l'axe $o\xi$, et on a, par suite,

$$\delta'_2 = M\xi' + c.$$

On vise ensuite sur le second collimateur, et l'on a

$$\delta''_2 = M\xi'' + c.$$

On a d'autre part la relation

$$\delta'_2 = -\delta''_2,$$

d'où

$$M\xi' + c = -M\xi'' - c,$$

et

$$c = -\frac{1}{2} M(\xi' + \xi'').$$

38. Détermination de c par la visée sur un collimateur et le retournement de l'axe de rotation bout pour bout. — On vise une première fois comme précédemment et l'on a :

$$\delta'_2 = M\xi' + c.$$

On retourne ensuite l'instrument de manière que l'axe de rotation soit retourné bout pour bout et on vise une seconde fois le même collimateur. On a

$$\delta''_2 = M\xi'' + c.$$

Puisque l'axe O_2Z_2 coïncide avec l'axe de rotation, et que celui-ci a été retourné bout pour bout, on a

$$\delta''_2 = -\delta'_2.$$

On en déduit, comme dans le cas précédent,

$$c = -\frac{M}{2}\left(\xi' + \xi''\right).$$

39. Introduction de l'inclinaison, de la déviation azimutale et de la latitude dans les formules générales. — Les quantités A′ et B′ sont l'angle de position et l'angle de pente de l'axe binaire O_3X_2 par rapport aux axes binaires théoriques, et la quantité C′ est une troisième quantité dont la valeur achève de déterminer la position des axes $O_3X_2Y_2Z_2$ de l'instrument par rapport à ces axes théoriques. Dans la question dont nous nous occupons ici, on peut, par hypothèse, arrêter aux termes du premier degré les développements en séries par rapport aux quantités A′, B′, C′.

Si on applique cette hypothèse aux formules générales de transformation,

$$\begin{aligned} x'' &= x_2 \cos A' \cos B' \\ &\quad + y_2 (-\sin A' \cos C' - \cos A' \sin B' \sin C') \\ &\quad + z_2 (+\sin A' \sin C' - \cos A' \sin B' \cos C'), \\ y'' &= x_2 \sin A' \cos B' \\ &\quad + y_2 (\cos A' \cos C' - \sin A' \sin B' \sin C') \\ &\quad + z_2 (-\cos A' \sin C' - \sin A' \sin B' \sin C'), \\ z'' &= x_2 \sin B' + y_2 \cos B' \sin C' + z_2 \cos B' \cos C, \end{aligned}$$

ces formules se simplifient et deviennent :

$$x'' = x_2 - A'y_2 - B'z_2,$$
$$y'' = A'x_2 + y_2 - C'z_2,$$
$$z'' = B'x_2 + C'y_2 + z_2.$$

On sait que les coefficients de z_2 dans ces formules sont les cosinus directeurs de O_3Z_2 par rapport au système $O_3X''Y''Z''$. Il est du reste facile de s'en assurer en remarquant que ces cosinus directeurs sont égaux aux coordonnées x'', y'', z'' du point pris sur l'axe O_3Z_2 à une distance de O_3 égale à 1, c'est-à-dire du point $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 1$.

Les cosinus directeurs de O_3Z_2 sont donc $-B'$, $-C'$ et $+1$.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur le croquis ci-contre (fig. 9) indiquant les positions relatives des axes $O_3X''Y''Z''$ et $O_3X'''Y'''Z'''$ pour voir que les cosinus directeurs de O_3Z_2 par rapport à ce dernier système sont $-B'$, -1, $-C'$.

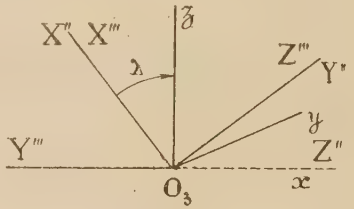


Fig. 9

Désignons par i et α les coordonnées polaires de la même direction O_3Z_2 par rapport à un système zénithal O_3xyz dont l'axe O_3z est dirigé vers le zénith, l'axe O_3y vers le nord et dont l'axe O_3x coïncide avec O_3Z''.

Désignons par λ l'angle $X'''O_3z$ qui n'est autre que la latitude du point O_3.

Nous avons

$$X''' = z\cos\lambda - y\sin\lambda,$$
$$Z''' = z\sin\lambda + y\cos\lambda,$$
$$Y''' = -x.$$

En appliquant ces formules au point de l'axe O_3Z_2 situé à la distance 1 de l'origine, on obtient

$$-B' = \sin i\cos\lambda - \sin\alpha\cos i\sin\lambda,$$
$$-C' = \sin i\sin\lambda + \sin\alpha\cos i\cos\lambda,$$
$$-1 = -\cos i\cos\alpha.$$

Par le développement des fonctions de i et α contenues dans ces relations, en séries limitées aux termes du premier degré, la dernière devient une identité et les deux premières se réduisent à :

$$-B' = i\cos\lambda - \alpha\sin\lambda,$$
$$-C' = i\sin\lambda + \alpha\cos\lambda.$$

En remplaçant B' et C' par ces valeurs dans les formules méridiennes, on obtient : pour les passages supérieurs,

$$(a + b\theta - R)\cos D = c + M\xi + N\eta + \alpha\sin(\lambda - D) - i\cos(\lambda - D);$$

pour les passages inférieurs,

$$(a+b\theta-R\pm 12^{n})\cos D=-c-M\xi-N\eta+\alpha\sin(\lambda+D)-i\cos(\lambda+D).$$

Avant d'exposer les moyens qui ont été employés pour faire usage de ces formules, nous devons signaler à ce sujet une particularité intéressante.

Supposons qu'on veuille déterminer, exclusivement par des observations astronomiques dans le méridien supérieur, les constantes a, b, c, α et i en visant cinq étoiles différentes ayant pour déclinaisons D_1, D_2, ... D_5.

Le déterminant des cinq équations serait

$$\begin{vmatrix}
\cos D_1, & \theta_1\cos D_1, & 1, & -\sin\lambda\cos D_1+\cos\lambda\sin D_1, & \cos\lambda\cos D_1+\sin\lambda\sin D_1\\
\cos D_2, & \theta_2\cos D_2, & 1, & -\sin\lambda\cos D_2+\cos\lambda\sin D_2, & \cos\lambda\cos D_2+\sin\lambda\sin D_2\\
\cos D_3, & \theta_3\cos D_3, & 1, & -\sin\lambda\cos D_3+\cos\lambda\sin D_3, & \cos\lambda\cos D_3+\sin\lambda\sin D_3\\
\cos D_4, & \theta_4\cos D_4, & 1, & -\sin\lambda\cos D_4+\cos\lambda\sin D_4, & \cos\lambda\cos D_4+\sin\lambda\sin D_4\\
\cos D_5, & \theta_5\cos D_5, & 1, & -\sin\lambda\cos D_5+\cos\lambda\sin D_5, & \cos\lambda\cos D_5+\sin\lambda\sin D_5
\end{vmatrix}$$

En ajoutant à la 4e colonne la première multipliée par $\sin\lambda$ et à la 5e colonne la première multipliée par $-\cos\lambda$, et en divisant ensuite le déterminant par $\sin\lambda\cos\lambda$, on voit que les deux dernières colonnes deviennent identiques. Le déterminant primitif est donc égal à zéro, et les formules méridiennes ne se prêtent pas à la détermination exclusivement astronomique des cinq erreurs a, b, c, α et i. Il est nécessaire de faire disparaître une des deux dernières colonnes en déterminant séparément α ou i.

La détermination séparée de i peut se faire ou bien par l'emploi d'un niveau à bulle, ou bien par la visée dans un bain de mercure.

40. Détermination de l'inclinaison i de l'axe de rotation O_3Z_2 au moyen du niveau à bulle. — L'étude complète de cette question a été faite par nous dans notre étude intitulée *Théorie nouvelle de niveau à bulle longitudinal* et publiée dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles (1912).

41. Détermination de i ou c par la visée dans un bain de mercure. — Supposons qu'on vise dans un bain de mercure et qu'on amène l'image du centre réticulaire réfléchi sur l'axe $o\xi$ du réticule. La verticale étant la bissectrice du rayon incident et du rayon réfléchi, est déterminée par $\xi/2$.

Or on sait que la direction nadirale est dans le méridien inférieur, qu'elle a une déclinaison égale à $-\lambda$, et qu'on a en outre $(a+bc-R\quad 12^{n})=0$.

La formule pour le passage inférieur devient donc

$$0=-c-\frac{1}{2}M\xi-i.$$

L'observation dans le bain de mercure permet ainsi de calculer i lorsqu'on a déterminé directement c, ou bien de calculer c lorsqu'on a déterminé directement i.

On pourrait aussi éliminer l'inclinaison i des formules méridiennes en la remplaçant par sa valeur en fonction de c.

On pourrait, enfin, faire la visée nadirale une seconde fois après avoir retourné l'axe O_3Z_2 bout pour bout.

De cette manière c change de signe, et l'on a

$$0 = c - \frac{1}{2} M\xi' - i ;$$

cette équation, jointe à la précédente, donne

$$c = \frac{M}{4}\left(-\xi' - \xi\right),$$

$$i = \frac{M}{4}\left(\xi' - \xi\right).$$

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS 93

CHAPITRE PREMIER

Introduction

§ 1. — *Préliminaires*

1. Considérations générales 93
2. Classification générale des instruments. 93

§ 2. — *Réflexion de la lumière*

3. Description du phénomène 94
4. Problème fondamental 94
5. Cas particulier 95
6. Première application 96
7. Corollaire 97
8. Deuxième application 97
9. Troisième application 98

§ 3. — *Réfraction de la lumière*

10. Phénomène de la réfraction 99
11. Problème fondamental 100
12. Problème. 101
13. Formules pratiques 102
14. Équations de correspondance 103
15. Réfraction à travers une série de calottes sphériques. 104
16. Des calottes sphériques centrées 105

CHAPITRE II

Des instruments primaires ou viseurs

17. Définition. rôle et classification 109
18. De la réfraction atmosphérique 110
19. Viseurs simples et viseurs à lunette 112
20. Lunette astronomique 112
21. Lignes de visée et coordonnées primaires d'une lunette astronomique . 115
22. Équations primaires des lignes de visée astronomiques . . . 116
23. Lunette topographique et géodésique 117

CHAPITRE III

Des instruments binaires

24. Définition. 118
25. Axes coordonnés d'un instrument binaire 119
26. Formules générales 120
27. Correction des positions défectueuses de l'instrument . . . 123

CHAPITRE IV

Des instruments ternaires

28. Définition. 125
29. Axes coordonnés ternaires 125
30. Formules générales 126
31. Correction des positions défectueuses 127

CHAPITRE V

Application des formules générales aux instruments méridiens

32. Description 127
33. Formules générales 128
34. Détermination des constantes contenues dans les formules méridiennes . 129
35. Coefficients de ξ et η 130
36. Erreur du zéro 131
37. Détermination de la constante c par des collimateurs 131
38. Détermination de c par la visée sur un collimateur et le retournement de l'axe de rotation bout pour bout 133
39. Introduction de l'inclinaison, de la déviation azimutale et de la latitude dans les formules générales 133
40. Détermination de l'inclinaison i de l'axe de rotation au moyen du niveau à bulle 135
41. Détermination de i ou de c par la visée dans un bain de mercure . . 135

Projet de table des factorielles n ! jusque n = 1000

par M. M. Alliaume (1)

A propos de la communication de M. de Montessus, M. Alliaume attire l'attention sur l'intérêt qu'il y aurait à posséder, sous une forme utilisable, les factorielles n ! des nombres de l'ordre de plusieurs centaines, par exemple jusque $n = 1000$. Une table déjà étendue des valeurs de n ! va jusque $n = 50$, mais elle est pratiquement inutilisable dès son milieu : 25 ! s'écrit au moyen de 26 chiffres, 50 ! au moyen de 65 chiffres : le calcul à la plume est impossible pour de pareils nombres, et aucune machine n'est suffisante à des opérations qui les comportent. Aussi MM. de Montessus et Duarte ont-ils calculé récemment, pour n allant jusque 1000, une table à douze décimales de log n !. Mais on peut craindre que le nombre de décimales, même s'il était beaucoup plus grand, ne devienne rapidement incapable d'assurer aux calculs une approximation convenable. C'est pourquoi le *Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, se mettant au service du Calcul des probabilités et de la Théorie des erreurs, vient d'entreprendre, jusque $n = 1000$, le calcul des n ! décomposées en leurs facteurs premiers. Les opérations sur les factorielles comportent généralement des fractions dont les deux termes renferment pareilles expressions. Si celles-ci sont connues sous la forme de produits de facteurs premiers, des simplifications importantes se feront rapidement, et il ne restera que des nombres auxquels les méthodes ordinaires seront applicables. Ce travail est arrivé aujourd'hui à $n = 380$:

$$380! = 2^{374}.\ 3^{187}.\ 5^{94}.\ 7^{62}.\ 11^{37}.\ 13^{31}.\ 17^{23}.\ 19^{21}.\ 23^{16}.\ 29^{13}.\ 31^{12}.\ 37^{10}.\ 41^{9}.\ 43^{8}.\ 47^{8}.\ 53^{7}.\ 59^{6}.\ 61^{6}.\ 67^{5}.\ 71^{5}.\ 73^{5}.\ 79^{4}.\ 83^{4}.\ 89^{4}.\ 97^{3}.\ 101^{3}.\ 103^{3}.\ 107^{3}.\ 109^{3}.\ 113^{3}.\ 127^{2}.\ 131^{2}.\ 137^{2}.\ 139^{2}.\ 149^{2}.\ 151^{2}.\ 157^{2}.\ 163^{2}.\ 167^{2}.\ 173^{2}.\ 179^{2}.\ 181^{2}.\ 191\ .\ 193\ .\ 197\ .\ 199\ .\ 211\ .\ 223\ .\ 227\ .\ 229\ .\ 233\ .\ 239\ .\ 241\ .\ 251\ .\ 257\ .\ 263\ .\ 269\ .\ 271\ .\ 277\ .\ 281\ .\ 283\ .\ 293\ .\ 307\ .\ 311\ .\ 313\ .\ 317\ .\ 331\ .\ 337\ .\ 347\ .\ 349\ .\ 353\ .\ 359\ .\ 367\ .\ 373\ .\ 379\ .$$

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 131 de la première partie.

Le dernier nombre cherché, 1000 !, s'écrira au moyen de 168 facteurs. Pour rendre ces résultats plus maniables, sans restreindre leur utilité, une deuxième table fournira les valeurs des n ! décomposées en des expressions pour lesquelles on propose la dénomination de factorielles premières : par la factorielle première d'un nombre premier p on entend le produit des nombres premiers qui ne lui sont pas supérieurs. En convenant d'écrire (p) pour la factorielle première de p, on a, par exemple,

$$380\,! = (2)^{187}.\,(3)^{93}.\,(5)^{32}.\,(7)^{25}.\,(11)^{6}.\,(13)^{8}.\,(17)^{2}.\,(19)^{5}.\,(23)^{3}.\,(29).$$
$$(31)^{2}.\,(37).\,(41).\,(47).\,(53).\,(61).\,(73).\,(89).\,(113).\,(181).\,(379).$$

N° 34.

Étude nomographique du quadrant de Robert l'Anglais [1]

par M. M. Alliaume [2]

Introduction. — Le quadrant de Robert l'Anglais et les manuscrits dans lesquels cet astrolabe est décrit ont été étudiés par Paul Tannery dans un mémoire des Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale et autres bibliothèques, au tome XXXV de ce recueil (Paris, 1897) : *Le traité du quadrant de maître Robert Anglès* (Montpellier, XIII^e^ siècle), *texte latin et ancienne traduction grecque,* pp. 561 640. Le texte grec reproduit dans ce mémoire est extrait de la *Bernhardina veterum mathematicorum synopsis.* Le texte latin est celui de l'un des onze manuscrits de la Bibliothèque nationale qui renferment le même traité [3]. L'auteur signale vingt-quatre autres manuscrits dans diverses bibliothèques, parmi lesquels un manuscrit de la bibliothèque de la ville de Bruges. On sait aujourd'hui que ce dépôt renferme, dans sa collection de manuscrits provenant de l'ancienne abbaye de ter Doest, deux exemplaires du même traité [4].

De l'examen des pièces P. Tannery conclut que le *Tractatus quadrantis* fut écrit au XIII^e^ siècle, avant 1276, par un certain *Magister Robertus Anglicus in Montepessulano* [5]. Ce nom doit remplacer celui de *Johannes Anglicus* et celui de *Jean de Montpellier* en tête de certains manuscrits et dans l'*Histoire littéraire de la France* [6].

---

[1] Noms propres cités : Aboul-Hhassan (p. 143); A. De Poorter (p. 141); Isidore de Séville (p. 142); Jean de Montpellier (p. 141); Laude (p. 141); Martianus Capella (p. 141); Robert l'Anglais (Anglès) (passim); Robert Kilwardby (p. 141); J. J. Sédillot (p. 143); L. Sédillot (p. 142); P. Tannery (passim).

[2] Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 139 de la première partie.

[3] Fonds latin, 7298 (XIV^e^ siècle), fol. 54 v°-59 r°. — Inc. *Prohemium in compositionem et utilitatem quadrantis secundum modernos. Geometrie duo sunt partes.* — Expl. *per eius altitudinem et productum dabit capacitatem* [*eius*].

[4] A. De Poorter et M. Alliaume, *Catalogue des manuscrits mathématiques et astronomiques de la bibliothèque de Bruges,* Bruges, 1922. — Le manuscrit de Bruges cité par P. Tannery appartient au recueil 528 (XIV^e^ siècle). Celui qu'il n'a pas connu se trouve dans le recueil 522 (même époque). Ce dernier est mutilé (*Catalogue...*, p. 29). Les deux textes sont les mêmes : Inc. *Incipit quadrans. Geometriae duae sunt partes.* Expl. *per eius altitudinem et productum dabit capacitatem.*

[5] P. Tannery expose les raisons pour lesquelles il traduit par *Maître Robert Anglès,* et non *Robert l'Anglais.* Mais il reconnaît que ces raisons sont peu décisives, et nous avons cru pouvoir adopter dans la notice actuelle cette dernière dénomination qui est généralement employée à propos de l'instrument astronomique étudié ici.

[6] P. Tannery discute aussi l'identité de Robert Anglès et d'un Anglais du même siècle, *Robert Kilwardby,* qui assistait, en 1271, comme provincial d'Angleterre, à un chapitre

Description du quadrant. — Le quadrant de Robert l'Anglais est décrit d'une manière très détaillée dans le mémoire de P. Tannery. Nous ne nous occuperons ici que de ce qui concerne son usage astronomique. Celui-ci a pour objet la détermination de l'heure temporaire (saisonnière ou artificielle) par l'observation du Soleil, la mesure de la hauteur de celui-ci : les heures temporaires sont comptées de 0 à 12, du lever au coucher du Soleil.

Le quadrant est, dans son ensemble (fig. 1), un quart de cercle. L'un des rayons extrêmes porte deux pinnules dont les fenêtres déterminent

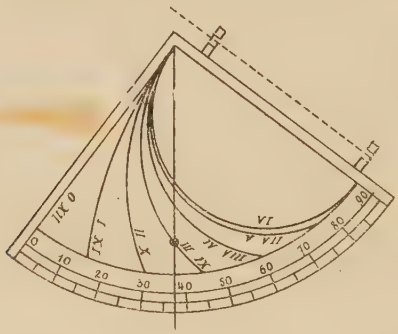


Fig. 1.

une droite. Le limbe est gradué de 0 à 90°, à partir du rayon qui ne porte pas les pinnules. Enfin le quadrant renferme une série de lignes, les lignes horaires : chacune a deux cotes, heures temporaires, dont la

---

de l'ordre des Dominicains tenu à Montpellier. Or cette année 1271 est précisément celle à laquelle on sait que Robert Anglès écrivit, à Montpellier, un commentaire sur la sphère de Sacrobosco. P. Tannery conclut cependant à la non-identité de ces deux personnages pour plusieurs raisons dont voici la principale (encore que l'auteur écrive *surtout* à l'occasion d'une autre qui nous paraît plus discutable) : « Kilwardby est un scholastique bien connu qui a laissé de nombreux écrits; mais aucun d'eux ne touche aux mathématiques. Il est tout à fait invraisemblable que ce personnage ait composé vers 1271 des traités mathématiques qui n'aient point été inscrits parmi ses autres ouvrages ». — Or la bibliothèque de Bruges possède au moins deux recueils de manuscrits renfermant des raités scientifiques attribués à Kilwardby. Voici leurs numéros et les titres de ces traités. 424 : *Robertus Kilvardeby prior provincialis fratrum predicatorum in provincia anglie, de ortu omnium scienciarum. Quedam excerpta ex libro Marciani Capella de nuptiis mercurii et philologie... De ortu scientiarum. Alia excerpta e Martiano Capella.* Parmi ces extraits de Capella : *De arithmetica, De geometria, De astronomia.* De même 510 : *excerptio fratris Roberti Kilwardy de scientiis liberalibus et mechanicis, sive de ortu scientiarum* ». — Il semble donc y avoir lieu de reprendre la question. - Les titres ci-dessus ont été tirés de l'ancien catalogue des manuscrits (catalogue Laude) de la bibliothèque de Bruges, et doivent peut-être être retouchés. — Dans notre catalogue spécial de 1922, nous n'avons pas mentionné, comme nous le disions dans le préface, les ouvrages de nature encyclopédique, les grandes compilations comme celles de Martianus Capella, Isidore de Séville...

somme est 12 ; le rayon extrême qui ne porte pas les pinnules appartient à cette famille de lignes horaires, dans laquelle il doit porter la double cote 0-12. Au sommet du quadrant est attaché un fil que tend le poids d'une perle mobile à frottement dur le long de ce fil.

Par hypothèse, on connaît la hauteur du Soleil à son passage dans le plan du méridien, le jour de l'observation. Ceci résulte de la latitude du lieu et de la déclinaison du Soleil, celle-ci étant donnée par une table dont l'argument est la date du jour de l'observation (1). Mais un curseur circulaire se déplaçant le long du limbe gradué dispense de ce calcul ; le mémoire de P. Tannery décrit longuement ce curseur, que nous avons supprimé de la figure et dont il n'y a pas lieu de parler davantage ici (2).

Avant l'observation, on a tendu le fil sur le quadrant de manière à y lire, sur le limbe, la hauteur du Soleil à son passage au méridien, et on a, dans cette position du fil, amené la perle au point d'intersection de celui-ci avec la ligne horaire cotée 6.

A l'instant de l'observation, instant dont on désire connaître l'heure temporaire, la ligne que déterminent les fenêtres des pinnules doit passer par le Soleil ; on s'assure de ceci, sans visée, par le passage d'un même pinceau lumineux à travers les deux pinnules. Le quadrant, rasé par le fil tendu, est tenu dans un plan vertical. La lecture sous le fil est la hauteur du Soleil à l'instant de l'observation, et l'heure horaire demandée est l'une ou l'autre des cotes de la ligne horaire, généralement interpolée, à laquelle la perle appartient, suivant que l'observation se fait dans la matinée ou dans l'après-midi. P. Tannery a à peine esquissé l'étude mathématique de ce quadrant, et ne s'est pas occupé de la latitude pour

---

(1) Quant à la latitude du lieu, Robert l'Anglais recommande de la déterminer aussi au moyen de son quadrant, soit par une observation du Soleil à l'équinoxe, soit par l'observation d'une même étoile circompolaire à ses deux passages au méridien

(2) Le même quadrant dépourvu de curseur pour ce calcul d'addition ou de soustraction était connu des Arabes : L. Sédillot, *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes* (voir fig. 2 de ce mémoire), MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS A L'ACADÉMIE ROYALE DES INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES, première série, t. I. Paris, 1844. — Une excellente description du quadrant, bien supérieure à celle de Maître Robert, se trouve dans le manuscrit arabe 2508 (naguère 1148) de la Bibliothèque nationale. Elle est due à Aboul-Hhassan (orth. de L. Sédillot) ou Abû-Alî El. Hasan b.'Alî b. 'Omar el. Marâkosî, qui vivait au Maroc vers le milieu du XIII^e^ siècle. Voir aussi J. J. Sédillot : *Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au XIII^e^ siècle par Aboul-Hhassan Alî de Maroc*, 2 vol., Paris, 1834-1835. — A propos du quart de cercle, qui est le quadrant de Montpellier, l'auteur déclare n'avoir pas à s'étendre beaucoup sur ce sujet, « attendu que c'est une chose trop connue des personnes qui fabriquent des instruments astronomiques ». Il décrit néanmoins avec un grand soin la manière de tracer les lignes du quadrant, en particulier les circonférences horaires, dont les centres se trouvent soit par la règle et le compas, soit par le calcul trigonométrique, et le traité renferme une table des distances de ces centres au centre du quadrant en fonction du diamètre de la ligne de six heures.

laquelle l'appareil a été construit. Nous ferons cette étude du point de vue nomographique ; ce sera un nomogramme à entrecroisement de trois familles de lignes : les droites réalisées par le fil vertical, les circonférences lieux des positions de la perle, et les lignes horaires.

Problème I. — On donne la latitude φ d'un point terrestre, et la hauteur h_o sous laquelle une étoile passe au méridien supérieur de ce point; on donne aussi la hauteur h de cette étoile. On demande son angle horaire A.

Par rapport à des axes équatoriaux horaires géocentriques, les coordonnées polaires de la verticale du lieu (vers le zénith) sont $(0, \varphi)$ tandis que les coordonnées polaires de la direction de l'étoile sont A et sa déclinaison D. La hauteur h est le complément de l'angle de ces deux directions ; de sorte que

$$\sin h = \sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D \cos A.$$

En particulier, si $A = 0$, c'est-à-dire au passage de l'étoile dans le méridien supérieur,

$$\sin h_o = \cos (\varphi - D),$$

d'où, en convenant de mesurer les hauteurs méridiennes à partir du point cardinal de nom contraire à celui du pôle élevé,

$$D = h_o + \varphi - 90^\circ.$$

La relation demandée résulte de l'élimination de D :

$$\cos A = \frac{\sin h + \sin \varphi \cos (\varphi + h_o)}{\cos \varphi \sin (\varphi + h_o)}.$$

Par nature du problème, aux données de celui-ci correspondent deux valeurs de A, égales en valeur absolue et de signes contraires; leur valeur absolue commune est moindre que 180°.

En particulier, au point terrestre φ, l'étoile qui passe au méridien supérieur sous la hauteur h_o se lève et se couche ($h = 0$) suivant les angles horaires A_o donnés par la formule

$$\cos A_o = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} (\varphi + h_o).$$

Heures temporaires. — En un lieu terrestre déterminé, et en un jour déterminé, une heure temporaire (saisonnière, artificielle) est la douzième partie de la durée qui, en ce lieu et en ce jour, commence au lever du Soleil et se termine au coucher de celui-ci. L'heure temporaire d'un instant est H lorsque cet instant divise le jour de lumière dans le rapport H/(12—H).

Pour exprimer l'heure temporaire H en fonction de l'angle horaire A du Soleil, on considère celui-ci comme variant proportionnellement au temps.

Alors H est une fonction linéaire de A. Si A_o est l'angle horaire du Soleil à son lever, et A_1 l'angle horaire de cet astre à son coucher, cette fonction linéaire est

$$H = \frac{12(-A_o + A)}{A_1 \quad A_o},$$

et si on veut éviter toute difficulté que l'on pourrait trouver dans la définition ci-dessus de l'heure temporaire, il suffit d'admettre cette formule pour sa définition.

Mais on adoptera l'approximation pour laquelle la déclinaison du Soleil peut être considérée comme constante pendant toute la durée d'un même jour. Cette approximation permet de traiter, pendant la durée du jour, le mouvement diurne du Soleil comme celui d'une étoile, d'appliquer au Soleil la solution du problème précédent, et, en particulier, d'écrire

$$H = 6\,\frac{A_o - A}{A_o}.$$

Problème II. — On donne la latitude φ du point terrestre, et la hauteur h_o sous laquelle, à la date considérée, le Soleil passe au méridien supérieur ; on définit un instant par la hauteur h du Soleil. On demande l'heure temporaire H à cet instant.

On a

$$1 - \frac{H}{6} = \frac{A}{A_o},$$

d'où, en vertu du problème I,

$$1 - \frac{H}{6} = \frac{\text{arc cos}\,\dfrac{\sin h + \sin\varphi\cos(\varphi + h_o)}{\cos\varphi\sin(\varphi + h_o)}}{\text{arc cos}\,[\text{tg}\,\varphi\,\text{cotg}\,(\varphi + h_o)]}.$$

Au dénominateur, on prendra l'arc cos appartenant à l'un des deux premiers quadrants, et, par suite, au numérateur, un angle dont la valeur absolue est moindre que 180° et qui sera positif ou négatif suivant que l'instant proposé appartient à la matinée ou à l'après-midi.

Le quadrant théorique de Robert l'Anglais. — Ce cadran solaire, construit pour la lecture de l'heure temporaire par l'observation de la hauteur du Soleil, est équivalent à un nomogramme portant trois familles de lignes à un paramètre.

Son plan est rapporté à deux demi-droites Ox et Oy (fig. 2) perpendiculaires l'une à l'autre, et dont la première sera, pendant l'observation, parallèle et opposée à la direction du Soleil. Autour du point O, des angles h sont mesurés à partir de Oy vers Ox. Les familles de lignes ont pour paramètres h, h_o et H. La connaissance des valeurs numériques de h et de h_o ne suffit pas au calcul de H : il faut encore savoir quelle est la latitude φ.

Le quadrant de Robert l'Anglais doit donc, théoriquement, être construit pour une latitude déterminée.

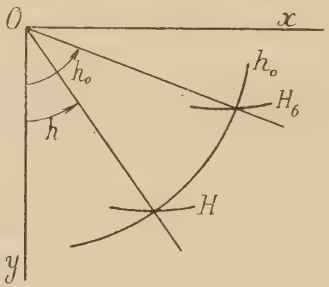


Fig. 2.

La famille de lignes en h est un faisceau de droites issues du point O; le paramètre h de l'une de ces droites est l'angle qu'elle fait avec la droite Ox. L'équation de ce faisceau est

$$y = x \operatorname{cotg} h.$$

La famille de lignes en h_o est un ensemble de circonférences ayant pour centre commun le point O et dont le rayon est une fonction de h_o déterminée par la construction du quadrant et que nous considérerons provisoirement comme arbitraire. L'équation de cette famille est de la forme

$$x^2 + y^2 = f^2(h_o).$$

La famille de lignes en H doit être choisie de manière que le quadrant constitue un nomogramme à entrecroisement donnant, pour la latitude φ adoptée, l'une des variables h, h_o, H en fonction des valeurs numériques attribuées aux deux autres. Son équation en (x, y, H) résulte donc de l'élimination de h et de h_o entre les équations des deux premières familles et l'équation en (h, h_o, H) obtenue par la résolution du problème II.

La forme de chacune des courbes de cette famille dépend de la fonction adoptée $f(h_o)$. En particulier, la courbe H = 6 est celle qui correspond à $h = h_o$: c'est le lieu des points d'intersection des circonférences h_o de la deuxième famille et des droites du faisceau h définies par la condition $h = h_o$. Cette courbe est arbitraire comme la fonction $f(h_o)$, et, inversement, le choix d'une courbe déterminée H = 6 fixe la forme de la fonction $f(h_o)$. Sur le quadrant de Robert l'Anglais, la courbe H = 6 est une demi-circonférence dont le centre appartient à l'axe des x. Son rayon est évidemment arbitraire et le choix de ce rayon ne dépend que des dimensions que l'on désire donner à l'appareil. Soit c son diamètre; la fonction $f(h_o)$ qui résulte du choix de cette ligne est $c \sin h_o$. La famille h_o a pour équation

$$x^2 + y^2 = c^2 \sin^2 h_o,$$

et l'équation de la famille en H sera fournie par l'élimination de h et de h_o entre cette équation, l'équation

$$y = x \operatorname{cotg} h$$

et l'égalité obtenue au problème II entre (h, h_o, H).

Il est avantageux d'utiliser les coordonnées polaires (ρ, ω) :

$$x = \rho \cos \omega,$$
$$y = \rho \sin \omega,$$

et l'équation en (ρ, ω, H) de la troisième famille résultera de l'élimination de h et h_o entre l'égalité en (h, h_o, H) et les équations

$$\rho^2 = c^2 \sin^2 h_o,$$
$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{cotg} h.$$

Cette élimination laisse l'équation

$$1 - \frac{H}{6} = \frac{A'}{A'_o}$$

dans laquelle

$$\cos A' = \frac{\cos \omega + \sin \varphi \cos (\varphi + \operatorname{arc\,sin} \rho/c)}{\cos \varphi \sin (\varphi + \operatorname{arc\,sin} \rho/c)},$$

$$\cos A'_o = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} (\varphi + \operatorname{arc\,sin} \rho/c).$$

Chaque courbe H ne peut se tracer que par points. Remarquons que les courbes H dont la somme des cotes est égale à 12 se superposent. Il suffit donc de s'occuper, par exemple, des heures de la matinée. L'équation d'une courbe H de la matinée peut s'écrire

$$\cos A' = \cos \left[\left(1 - \frac{H}{6} \right) A'_o \right].$$

Pour des données ρ/c et H (ainsi que φ, comme il est toujours sous-entendu) le second membre est entièrement numérique. Posons

$$B = \cos \left[\left(1 - \frac{H}{6} \right) A'_o \right]$$

et, de plus,

$$\alpha = \sin \varphi \cos (\varphi + \operatorname{arc\,sin} \rho/c),$$
$$\beta = \cos \varphi \sin (\varphi + \operatorname{arc\,sin} \rho/c),$$

quantités entièrement numériques. L'équation en ω s'écrit

$$\cos \omega = B\beta - \alpha.$$

En particulier, pour H = 6, B = 1 et $\cos \omega = \beta - \alpha$, d'où

$$\rho = c \cos \omega,$$

à savoir la circonférence de diamètre c tracée dès le début, comme il était nécessaire ; et pour $H = 0$, $B = \cos A'_o$, d'où

$$\cos \omega = 0,$$

à savoir la droite Oy.

Le quadrant de Robert l'Anglais. — Le quadrant ne réalise pas les conditions théoriques énoncées ci-dessus. Les lignes horaires appartiennent

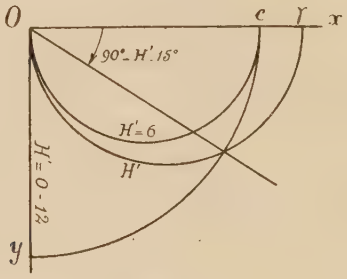


Fig. 3.

à des circonférences passant par le point O, et dont le centre se trouve sur l'axe des x. La détermination de chacune de ces lignes s'achève de la manière suivante. Soit H' la cote (au plus égale à 6 pour une ligne de la matinée) que porte la circonférence considérée. Elle rencontre la circonférence centrée en O et de rayon c en un point (fig. 3) dont l'angle de position est $\omega = 90° - H'.15°$. Ainsi, seules les lignes horaires $H' = 0$ (et 12) et $H' = 6$ vérifient le tracé théorique : pour ces lignes seules $H' = H$; et l'équation en (x, y) de la ligne horaire H' est

$$x^2 + y^2 - \frac{cx}{\sin (H'.\,15°)} = 0.$$

Pour savoir quelle est la signification de la lecture H' sur le quadrant, c'est-à-dire pour connaître H' en fonction de h et de h_o, il suffit d'éliminer x et y entre l'équation précédente et les équations

$$y = x \operatorname{cotg} h, \qquad x^2 + y^2 = c^2 \sin^2 h_o$$

des deux autres familles de lignes. On obtient

$$H' = \frac{1}{15} \operatorname{arc°sin} \left(\frac{\sin h}{\sin h_o} \right) (1).$$

(1) Cette relation peut s'écrire

$$\sin (H'.15°) = \frac{\sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D \cos A}{\sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{1 - \cos A}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} D}$$

C'est à quoi se réduit H pour $\varphi = 0$, de sorte que, strictement, le quadrant de Robert l'Anglais n'est constamment valable que sur l'équateur.

Pour juger de la différence entre H et H′, erreur du quadrant, éliminons h entre les deux équations en H et en H′ :

$$\sin(H'.15^\circ) = \cos\left\{\left(1 - \frac{H}{6}\right)\arccos\left[\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}(\varphi + h_o)\right]\right\}\frac{\cos\varphi \sin(\varphi + h_o)}{\sin h_o} - \frac{\sin\varphi\cos(\varphi + h_o)}{\sin h_o},$$

ou bien, en fonction de la déclinaison D du Soleil,

$$\sin(H'.15) = \frac{\sin\varphi\sin D + \cos\varphi\cos D\cos\left[\left(1 - \frac{H}{6}\right)\arccos(-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg} D)\right]}{\cos(\varphi - D)},$$

d'où

$$\sin\left[\left(1 - \frac{H'}{6}\right)45^\circ\right] = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{H}{6}\right)\arccos(-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg} D)\right]}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg} D}}\ (^1).$$

Appliquons ceci à la latitude de Montpellier, $\varphi = +43^\circ 37'$, pour laquelle Maître Robert dit 44°, à diverses déclinaisons D et aux valeurs entières de H. Les résultats de ces calculs se trouvent dans le tableau suivant des valeurs de 60 (H′ — H), erreur du quadrant, suivant les arguments D et H.

---

ou bien

$$\frac{\sin\frac{90^\circ - H'15^\circ}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A_o}{2}}.$$

Telle est la fonction H′ de A et de A_o par laquelle le quadrant remplace la fonction H,

$$\frac{6 - H}{6} \text{ ou } \frac{90 - H.15}{90} = \frac{A}{A_o},$$

qui résulte de la définition de l'heure temporaire. C'est à cette remarque que se réduit l'étude des lignes horaires du quadrant dans le mémoire de P. Tannery.

(1) Des développements en séries du premier et du second membre, respectivement en (H′ - H) et en tg φ tg D, et arrêtés aux termes du premier degré, montrent que, dans voisinage de tg D = 0, l'erreur (H′ — H) est

$$H' - H = \frac{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg} D}{15}\left\{\operatorname{tg}\left[\left(1 - \frac{H}{6}\right)\right]45^\circ + \frac{H}{6} - 1\right\}.$$

Valeurs de 60 (H′ — H) pour φ = 43°37′ (1)

H	D						
	23°27′	−20°	−10°	0	+10°	+20°	+ 23°27′
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	+5,4	+4,2	+2,4	0,0	−2,4	−6,6	−7,8
2	+6,0	+6,0	+3,0	0,0	−3,6	−8,4	−10,2
3	+6,6	+6,0	+3,0	0,0	−3,6	−8,4	−9,6
4	+5,4	+4,8	+2,4	0,0	−1,8	−6,0	−7,2
5	+3,0	+2,4	+1,2	0,0	−1,8	−3,6	−4,2
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
7	−3,0	−2,4	−1,2	0,0	+1,8	+3,6	+4,2
8	−5,4	−4,8	−2,4	0,0	+1,8	+6,0	+7,2
9	−6,6	−6,0	−3,0	0,0	+3,6	+8,4	+9,6
10	−6,0	−6,0	−3,0	0,0	+3,6	+8,4	+10,2
11	−5,4	−4,2	−2,4	0,0	+2,4	+6,6	+7,8
12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

(1) La plus grande erreur augmente rapidement avec la latitude. Pour φ = 18° 50, (Paris) et H = 2, au solstice d'été, 60 (H′ — H) = — 13,2. De même, pour φ = 51° 46′ (Oxford) et H = 2, on a, à la même époque, 60 (H′ — H) = — 15,0.

Un gnomon arabe du XIV^e siècle

par M. F. Moreau (1)

Le R. P. Delattre, correspondant de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, a trouvé, l'an dernier, dans les ruines de Carthage, un gnomon arabe du XIV^e siècle. Un estampage et une photographie de ce gnomon nous ont été obligeamment communiqués par M. l'abbé Ryckmans.

D'après les renseignements du R. P. Delattre, ce gnomon « est gravé sur une dalle carrée de travertin *(kadel)* de 24 cm. de côté et épaisse de 7 cm. Le revers et les tranches sont bruts. Il a été trouvé dans le terrain qui touche immédiatement à la basilique de S. Cyprien, voisine de Ste-Monique, à quelques mètres du mur latéral sud. A cet endroit on a trouvé également des fragments de poteries arabes et reconnu des traces de constructions de même origine. D'ailleurs, un fortin arabe avait été établi sur les ruines de cette basilique ».

Le style n'a pas été retrouvé, mais sa longueur est indiquée sur la dalle ; nous ignorons s'il s'agit d'un style simple, à boule ou à trou. La dalle porte une petite inscription de trois lignes, ainsi que plusieurs mots servant de légende au tracé ; l'écriture est semi-coufique.

L'étude paléographique de ce monument a été faite par M. l'abbé Ryckmans, docteur en langues sémitiques (Le Muséon, mai 1926) (2). Voici, d'après cette étude, les traductions des inscriptions arabes :

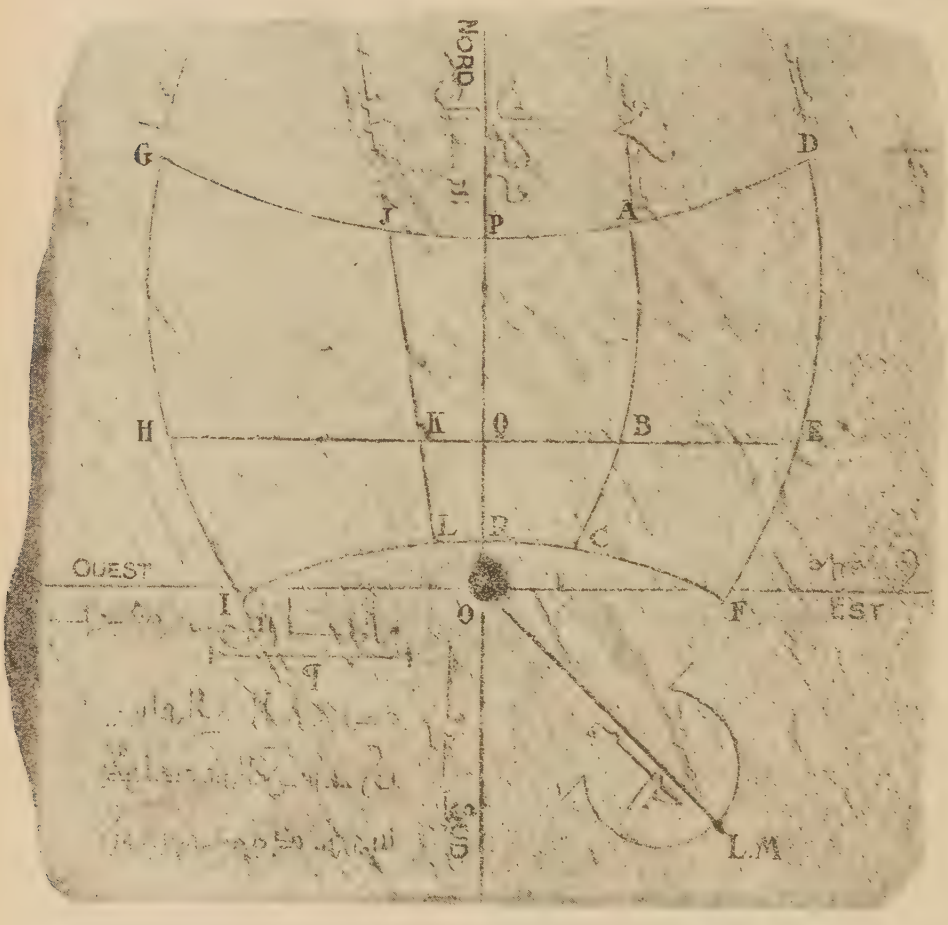
L'a exécuté Abû-l-Qâsim ibn Khasan esh-Shaddâd l'année 756 à Tunis.
Au-dessus de q : (miqyâs) *gnomon.*
Sous la ligne I F, à gauche : (maghrib) *ouest.*
Au-dessus de la ligne I F, à droite : (mashriq) *est.*
Le long de la droite O P, au-dessus du point P, à gauche : (samâl) *nord.*
» » » » à droite : (zawâl) *midi.*
Le long de la droite P O prolongée, au-dessus du point O : (ghanûb) *sud.*
Au-dessus du point G : (subkh) *matin.*
Au-dessus du point J : (ta'mîl) *élément de mensuration.*
Au-dessus du point A : (dhuhr) *temps qui suit midi de près.*
Au-dessus du point D : ('asr) *après-midi.*
Le long de la flèche, partant de O : (qibla) *direction de La Mecque.*

L'année 756 de l'*Hégire* va du 16 janvier 1355 au 4 janvier 1356 de l'ère julienne. D'après les considérations paléographiques exposées par M. l'abbé Ryckmans, on pourrait avoir des doutes sur la lecture de l'an-

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 149 de la première partie.

(2) Le cliché a été mis gracieusement à notre disposition par la Direction du Muséon.

née, certain point diacritique n'apparaissant pas nettement sur l'estampage ; si ce point diacritique n'existait pas, on devrait adopter la lecture 456, ce qui correspond au XI^e siècle de notre ère. Mais la lecture 756, qui semble préférable, est corroborée par le fait que notre gnomon présente une ligne d'heure équinoxiale, comme nous le verrons plus loin. Or l'apposition des heures équinoxiales sur les gnomons arabes n'apparaît



pas avant le XIII^e siècle. La première mention en est faite dans l'ouvrage d'*Abû-l-Khasan' 'Ali* le Marocain (1) (XIII^e siècle).

Ce gnomon appartient à la catégorie des cadrans horizontaux appelés *basita* (2). Le style vertical doit être fixé en O, comme l'indiquent

(1) *Traité des instruments astronomiques des Arabes*, trad. J. J. Sédillot, Paris, 1834-1835, 2 vol.

(2) Schoy, *Die Gnomonik der Araber*, Berlin, 1923, p. 27.

l'estampe et la photographie, à l'intersection de la droite est-ouest et de la droite nord-sud (P O). Cette dernière droite — méridienne — correspond à midi vrai, suivant le sens du mot *zawâl,* qui signifie « midi vrai, le déclin du soleil à partir de midi » (Sédillot).

La *qibla* est figurée par une droite qui part du point O et qui marque la direction de la Ka'ba à La Mecque, vers laquelle doivent s'orienter les musulmans du monde entier au moment de la prière. La figure en forme de Ω, représente la niche, pratiquée dans chaque mosquée, indiquant la direction de La Mecque.

L'extrémité de l'ombre du style décrit l'hyperbole I R F au solstice d'été ; elle parcourt la droite H E aux équinoxes et l'hyperbole G P D au solstice d'hiver. A midi vrai l'ombre se projette suivant O P et les ombres méridiennes O P, O Q et O R sont telles que le gnomon correspond à une latitude de 37°, qui est précisément la latitude de Tunis ou Carthage.

La *qibla* tracée sur notre gnomon est sud-est, et fait un angle de 46° avec la direction sud. Cette orientation de la *qibla* correspond-elle bien à Tunis ? Sachant que Tunis est à 30° de longitude à l'ouest de La Mecque et que les latitudes de Tunis et La Mecque sont respectivement 37° et 20°40′ (1), on détermine facilement par la résolution d'un triangle sphérique l'azimut de la *qibla* à Tunis. On trouve ainsi que la *qibla* à Tunis fait en réalité un angle de 68° avec la direction sud, tandis que sur notre gnomon cet angle n'est que de 46°. L'auteur du gnomon n'a-t-il eu d'autre prétention que d'indiquer une direction grossièrement approchée de La Mecque, ou ignorait-il la valeur exacte de la différence de longitude La Mecque-Tunis et les procédés employés pour déterminer l'azimut de la *qibla* ? (2).

Telle qu'elle est tracée sur le gnomon, la qibla devrait correspondre à un point situé à 37° de latitude et à 15°44′ de longitude à l'ouest de La Mecque (île de Siphnos, dans la Mer Egée).

Le mot *subkh* signifie « matin » ou plutôt « crépuscule de l'aurore » En langage vulgaire, il s'emploie cependant pour désigner la matinée. Ce mot désigne sur notre gnomon la courbe GHI qui est symétrique, par rapport à la méridienne OP, de la courbe DEF, appelée *'asr*. On sait que « les musulmans sont astreints cinq fois par jour à la prière : 1. à la pointe du jour *(fajr, subkh)* ; 2. vers l'heure de midi *(dhuhr*, « temps qui suit immédiatement midi ») ; 3. l'après-midi *('asr)* ; 4. au coucher du soleil *(maghrib)* ; 5. plus tard dans la soirée *('isha)*, « la première partie de la nuit » » (3). Trois de ces noms se retrouvent sur notre gnomon *(maghrib*

(1) Cf. L. Am. Sédillot, *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes,* p. 99.

(2) Abû-l-Khasan fait une erreur de plus de 5° dans l'estimation de la différence de longitude entre La Mecque et Tunis. Cf. J. J. Sédillot, *op. cit.*, t. I, p. 316. Pour les procédés de détermination de la *qibla* chez les Arabes, cf. Schoy, *op. cit.*, pp. 34-36.

(3) Schoy, *op. cit.*, pp. 43-44.

désigne un point cardinal) : *subkh*, *dhuhr* et *'asr*. La détermination du *dhuhr* dépend de celle du *'asr*, qui a une importance toute spéciale. Mais les savants musulmans ne sont pas d'accord au sujet de la détermination précise du *'asr*. Voici quelques renseignements donnés par Schoy [1] à ce sujet : 1. D'après l'*Imân Sâfi'i* (764-819) la prière du *'asr* doit commencer lorsque le gnomon projette une ombre égale à la longueur du style ; 2. Un autre auteur dit : la « prière du *'asr* » commence au moment où le gnomon projette une ombre égale au double de la longueur du style et finit au coucher du soleil ; 3. D'après *Abû-l-Khasan*, le *'asr* est le temps de l'après-midi qui commence au moment où l'ombre horizontale est égale à l'ombre méridienne augmentée de la longueur du style. Il finit lorsque l'ombre du style dépasse du double de la hauteur du gnomon la longueur de l'ombre méridienne. En pratique, cette prière du *'asr* a lieu à la 9e heure, c'est-à-dire 3 heures temporaires [2] après midi vrai.

Examinons de nouveau notre gnomon : Les courbes ABC, DEF et GHI ne sont pas des lignes d'heure égale — ou équinoxiale — car dans ce cas elles seraient des droites, comme la ligne horaire JL. Ce ne sont pas non plus des lignes d'heure temporaire, car alors nous aurions des courbes différant peu de lignes droites. Mais l'examen de ces courbes ABC, DEF et GHI amène à faire les constatations suivantes :

$$OA = 2q \qquad OB = q \qquad OC = \frac{q}{2}$$

$$OD = OG = q + OP \qquad OE = OH = q + OQ \qquad OF = OI = q + OR,$$

q représentant la longueur du style et OP, OQ, OR étant respectivement les longueurs des ombres méridiennes au solstice d'hiver, aux équinoxes et au solstice d'été. Nous voyons donc que l'heure de la « prière du *'asr* » est déterminée sur notre gnomon suivant les principes de Abû-l-Khasan.

Le *dhuhr* est le temps compris entre midi vrai et le commencement du *'asr*. *Sédillot* le définit « l'heure la plus chaude de la journée, une heure après midi ».

Quant à la droite JL, appelée *ta'mil*, elle correspond à une heure *équinoxiale* avant midi, c'est-à-dire 11^h du matin.

Le calcul des heures qui correspondent aux différents points des courbes ABC, DEF, GHI donne les résultats suivants :

Quand l'extrémité de l'ombre du style se trouve en :

---

[1] *Op. cit.*, pp. 44-45.

[2] Les Arabes divisent chaque jour et chaque nuit en douze parties égales qui varient de longueur suivant les saisons et suivant les latitudes. Ces parties sont appelées *heures temporaires* par opposition avec les heures équinoxiales ou égales.

A (solstice d'hiver), il est	1^h	26^m	de l'après-midi
B (équinoxes)	1	55	
C (solstice d'été)	1	46	
D (solstice d'hiver)	2	34	
E (équinoxes)	3	28	
F (solstice d'été)	3	52	
G (solstice d'hiver)	9	26	du matin
H (équinoxes)	8	32	
I (solstice d'été)	8	8	

Les heures qui précèdent sont des heures égales. Pour les convertir en heures temporaires, on se servira des relations suivantes, calculées pour la latitude 37° :

au solstice d'hiver : 1 heure temporaire = 47 minutes d'heure égale,
aux équinoxes : 1 heure temporaire = 1 heure égale,
au solstice d'été : 1 heure temporaire = $1^h\ 13^m$ (heure égale).

En heures temporaires, nous obtenons donc :

A : $1^h\ 50^m$	D : $3^h\ 17^m$	G : $8^h\ 43^m$
B : 1 55	E : 3 28	H : 8 32
C : 1 27	F : 3 11	I : 8 49

N° 36.

Le décentrage des systèmes optiques

par M. M. Alliaume [1]

1. Si un système optique centré est rapporté à des axes de coordonnées OXYZ ou $Oxyz$, choisis de manière que l'axe des (Z, z) soit l'axe optique du système, il définit, entre les points (X, Y, Z) de l'objet et les points (x, y, z) de l'image monochromatique (pour une longueur d'onde déterminée) une correspondance homographique dont les équations sont

$$x = \frac{fX}{Z - c}, \qquad y = \frac{fY}{Z - c}, \qquad z = \frac{c'Z + ff' - cc'}{Z - c}$$

avec les conditions

$$f \neq 0, \qquad f' \neq 0,$$

ou bien, inversement,

$$X = \frac{f'x}{z - c'}, \qquad Y = \frac{f'y}{z - c'}, \qquad Z = \frac{cz + ff' - cc'}{z - c'}.$$

Dans ces équations, les constantes c, c', $c + f$, $c' + f'$ sont respectivement la cote, en (Z, z), du foyer du milieu-objet, du foyer du milieu-image, du plan principal du milieu-objet, du plan principal du milieu-image. — La configuration intrinsèque d'un système optique centré ne dépend que des différences deux à deux de ces quatre constantes : c'est un système à trois paramètres.

2. Par rapport à des axes rectangulaires quelconques de coordonnées, soient (α, β, γ) les cosinus directeurs de l'axe optique (dirigé) d'un système centré, et soient (ξ_o, η_o, ζ_o) les coordonnées du point C de cet axe à partir duquel, le long de celui-ci, on mesure (algébriquement) les segments c, c', $c + f$, $c' + f'$.

Avec la notation

$$T = \alpha(X - \xi_o) + \beta(Y - y_o) + \gamma(Z - z_o),$$

les équations de correspondance sont

$$x = \xi + \frac{f(X - \xi_o) + \alpha(c' - f)T + \alpha(ff' - cc')}{T - c},$$

$$y = \eta_o + \frac{f(Y - y_o) + \beta(c' - f)T + \beta(ff' - cc')}{T - c},$$

$$z = \zeta_o + \frac{f(Z - z_o) + \gamma(c' - f)T + \gamma(ff' - cc')}{T - c},$$

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 153 de la deuxième partie.

et T est la projection sur l'axe optique du segment allant du point C au point (X, Y, Z).

Les coordonnées des foyers sont

$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) + (\alpha, \beta, \gamma)\, c,$$
$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) + (\alpha, \beta, \gamma)\, c',$$

et les intersections de l'axe et des plans principaux ont les coordonnées

$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) + (\alpha, \beta, \gamma)\,(c + f),$$
$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) + (\alpha, \beta, \gamma)\,(c' + f').$$

Inversement, avec la notation

$$t = \alpha\,(x - \xi_o) + \beta\,(y - \eta_o) + \gamma\,(z - \zeta_o),$$

on a

$$X = \xi_o + \frac{f'\,(x - \xi_o) + \alpha\,(c - f')\,t + \alpha\,(ff' - cc')}{t - c'},$$

$$Y = \eta_o + \frac{f'\,(y - \eta_o) + \beta\,(c - f')\,t + \beta\,(ff' - cc')}{t - c'},$$

$$Z = z_o + \frac{f'\,(z - \zeta_o) + \gamma\,(c - f')\,t + \gamma\,(ff' - cc')}{t - c'},$$

et t est la projection sur l'axe optique du segment allant du point C au point (x, y, z).

La correspondance entre les points du milieu-image et les points du milieu-objet ne change pas lorsque le système ne fait que tourner autour de son axe ; la position d'un système optique centré est définie par cinq paramètres (ξ_o, η_o, ζ_o, α/γ, β/γ), et un pareil système est, en configuration et en position, un système à huit paramètres. Les neuf constantes (c, c', f, f', ξ_o, η_o, ζ_o, α/γ, β/γ) sont liées par la condition qu'à un déplacement du point C le long de l'axe optique correspond, dans les segments c et c', une diminution égale à ce déplacement. En particulier, l'une des trois coordonnées du point C peut généralement être, a priori, faite égale à zéro.

3. La droite déterminée par le point (X, Y, Z) et le point correspondant (x, y, z) rencontre l'axe optique en un point dont les coordonnées sont

$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) + (\alpha, \beta, \gamma)\,\frac{T\,(c' - f) + ff' - cc'}{T - c - f},$$

et dont la position limite, pour T augmentant indéfiniment, est, par définition, le centre du système ; les coordonnées de ce point sont donc

$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) + (\alpha, \beta, \gamma)\,(c' - f).$$

Le centre du système peut toujours être adopté pour le point C

(ξ_o, η_o, ζ_o), origine des segments mesurés sur l'axe. Ce choix équivaut à la condition

$$c' - f = 0$$

qui exprime que, pour ce point C, la cote (le long de l'axe) du plan principal du milieu-objet est égale à la somme des cotes des deux foyers.

Par ce choix, les équations de correspondance se réduisent aux suivantes

$$x = \xi_o + f\frac{X - \xi_o + \alpha l}{T - c},$$

$$y = \eta_o + f\frac{Y - \eta_o + \beta l}{T - c},$$

$$z = \zeta_o + f\frac{Z - \zeta_o + \gamma l}{T - c}$$

où l'on a posé

$$l = f' - c$$

pour représenter l'excès de la cote du plan principal du milieu-image sur la somme des cotes des deux foyers, et dans lesquelles on aperçoit les trois paramètres intrinsèques *(f, c, l)* et, comme paramètres de position, les coordonnées (ξ_o, η_o, ζ_o) du centre optique et les cosinus directeurs (α, β, γ) de l'axe unis par la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$: ce sont bien les huit paramètres attendus.

En particulier, par le choix de l'origine des coordonnées au centre optique du système, et de l'axe des (Z, z) le long de l'axe optique, les équations de correspondance se réduisent à

$$x = \frac{fX}{Z - c}, \qquad y = \frac{fY}{Z - c}, \qquad z = f\frac{Z + l}{Z - c}.$$

4. Pour que les équations générales de la correspondance homographique

$$x = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1}{a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4},$$

$$y = \frac{a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2}{a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4},$$

$$z = \frac{a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + d_3}{a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4}$$

conviennent à un système optique centré, il faut et il suffit, par identification, que les équations en $(f, c, l, \xi_o, \eta_o, \zeta_o, \alpha, \beta, \gamma, k)$

$$f + \alpha\xi_o = ka_1, \qquad \alpha\eta_o = ka_2, \qquad \alpha\zeta_o = ka_3, \qquad \alpha = ka_4,$$
$$\beta\xi_o = kb_1, \qquad f + \beta\eta_o = kb_2, \qquad \beta\zeta_o = kb_3, \qquad \beta = kb_4,$$
$$\gamma\xi_o = kc_1, \qquad \gamma\eta_o = kc_2, \qquad f + \gamma\zeta_o = kc_3, \qquad \gamma = kc_4,$$

$$f\alpha l - f\xi_o - \xi_o(\alpha\xi_o + \beta\eta_o + \gamma\zeta_o) - c\xi_o = kd_1,$$
$$f\beta l - f\eta_o - \eta_o(\alpha\xi_o + \beta\eta_o + \gamma\zeta_o) - c\eta_o = kd_2,$$
$$f\gamma l - f\zeta_o - \zeta_o(\alpha\xi_o + \beta\eta_o + \gamma\zeta_o) - c\zeta_o = kd_3,$$
$$-(\alpha\xi_o + \beta\eta_o + \gamma\zeta_o) - c = kd_4,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

soient compatibles. L'élimination des dix inconnues entre ces dix-sept équations, laissera, pour exprimer la condition demandée, un système de sept égalités homogènes entre les constantes (a, b, c, d) de la transformation homographique.

En particulier, et plus utilement, pour que les équations générales de la correspondance homographique conviennent à un système optique de révolution dont le centre soit à l'origine des coordonnées, il faut et il suffit que les équations

$$ka_1 = f, \quad ka_2 = 0, \quad ka_3 = 0, \quad ka_4 = \alpha, \quad kd_1 = f\alpha l,$$
$$kb_1 = 0, \quad kb_2 = f, \quad kb_3 = 0, \quad kb_4 = \beta, \quad kd_2 = f\beta l,$$
$$kc_1 = 0, \quad kc_2 = 0, \quad kc_3 = f, \quad kc_4 = \gamma, \quad kd_3 = f\gamma l,$$
$$kd_4 = -c, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

en (f, c, l, α, β, γ, k) soient compatibles. Cette compatibilité s'exprime par les dix égalités

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0,$$
$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad b_3 = 0,$$
$$a_1 = b_2 = c_3,$$
$$d_1 / a_4 = d_2 / b_4 = d_3 / c_4,$$

au moyen desquelles

$$(\alpha, \beta, \gamma, c) = \pm \frac{(a_4, b_4, c_4 - d_4)}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}},$$

$$f = \pm \frac{(a_1, b_2, c_3)}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}}, \qquad l = \pm \left(\frac{d_1}{a_4}, \frac{d_2}{b_4}, \frac{d_3}{c_4}\right) \frac{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}}{(a_1, b_2, c_3)}.$$

5. Pour étudier le décentrage d'un système optique de révolution, adoptons pour origine des coordonnées la position théorique du centre optique, et pour axe des z la position théorique, dans le sens des segments croissants, de l'axe optique. Il en résulte que, dans les formules de transformation propres au système centré le plus général, α et β doivent être considérés comme des quantités petites, γ comme voisin de l'unité, ξ_o, η_o et ζ_o comme des longueurs petites vis-à-vis de f, de c et de l. Nous

définirons le premier ordre de petitesse en disant que tel est celui des quantités α, β et des rapports de (ξ_o, η_o, ζ_o) à (f, c, l), et nous effectuerons nos calculs à l'approximation pour laquelle les quantités petites de second ordre sont négligeables, d'où il résulte, d'abord, que γ peut être remplacé par l'unité.

S'il n'y avait pas décentrage, l'image du point (X, Y, Z) aurait pour coordonnées

$$x_o = \frac{f\,X}{Z-c}, \qquad y_o = \frac{f\,Y}{Z-c}, \qquad z_o = \frac{f\,(Z+l)}{Z-c}.$$

A l'image définie par ces égalités, le décentrage $(\xi_o, \zeta_o, \eta_o, \alpha, \beta)$ en substitue une autre, telle que les coordonnées du point-image de (X, Y, Z) subissent les variations suivantes

$$\Delta x = f\left\{\frac{X + l\,(\alpha - \xi_o/l)}{\alpha X + \beta Y + Z - c\,(1+\zeta_o/c)} + \frac{\xi_o}{f}\right\} - \frac{f\,X}{Z-c},$$

$$\Delta y = f\left\{\frac{Y + l\,(\beta - \eta_o/l)}{\alpha X + \beta Y + Z - c\,(1+\zeta_o/c)} + \frac{\eta_o}{f}\right\} - \frac{f\,Y}{Z-c},$$

$$\Delta z = f\left\{\frac{Z + l\,(1 - \zeta_o/l)}{\alpha X + \beta Y + Z - c\,(1+\zeta_o/c)} + \frac{\zeta_o}{f}\right\} - \frac{f\,(Z+l)}{Z-c}.$$

Le calcul de ces différences à l'approximation définie ci-dessus va déformer la nouvelle image en une figure qui ne sera plus une transformée homographique de la figure-objet ; mais cette déformation est négligeable par hypothèse :

$$\Delta x = \frac{\partial \Delta x}{\partial \xi_o}\xi_o + \frac{\partial \Delta x}{\partial \eta_o}\eta_o + \frac{\partial \Delta x}{\partial \zeta_o}\zeta_o + \frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial \Delta x}{\partial \beta}\beta$$

. . . . . .

où il est entendu que, dans chacun des coefficients, les éléments $(\xi_o, \eta_o, \zeta_o, \alpha, \beta)$ du décentrage doivent être remplacés par zéro. Ainsi, tous calculs faits,

$$\Delta x = \xi_o - \frac{f\,\xi_o}{Z-c} + \frac{f\,X\zeta_o}{(Z-c)^2} + f\alpha\,\frac{(Z-c)\,l - X^2}{(Z-c)^2} - f\beta\,\frac{XY}{(Z-c)^2},$$

$$\Delta y = \eta_o - \frac{f\,\eta_o}{Z-c} + \frac{f\,Y\zeta_o}{(Z-c)^2} - f\alpha\,\frac{XY}{(Z-c)^2} + f\beta\,\frac{(Z-c)\,l - Y^2}{(Z-c)^2},$$

$$\Delta z = \zeta_o + \frac{f\,(l+c)\,\zeta_o}{(Z-c)^2} - f\alpha\,\frac{XZ}{(Z-c)^2} - f\beta\,\frac{YZ}{(Z-c)^2}.$$

6. Si le système optique est constitué de deux systèmes de révolution théoriquement centrés sur la même droite, adoptée pour axe des (Z, z), soient $(0, 0, \zeta_{01})$ et $(0, 0, \zeta_{02})$ les coordonnées des centres optiques dans

leur position théorique. Les deux systèmes partiels, dont les paramètres intrinsèques sont respectivement (f_1, c_1, l_1) et (f_2, c_2, l_2), subissent de petits décentrages indépendants $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \alpha_1, \beta_1)$ et $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \alpha_2, \beta_2)$. Les coordonnées (x, y, z) de l'image finale du point (X, Y, Z) résultent de l'élimination des coordonnées (x', y', z') de l'image intermédiaire entre les six équations

$$x' = \xi_1 + f_1 \frac{X + \alpha_1 l_1 - \xi_1}{\alpha_1 X + \beta_1 Y + Z - \zeta_{01} - c_1 - \zeta_1},$$

$$y' = \eta_1 + f_1 \frac{Y + \beta_1 l_1 - \eta_1}{\alpha_1 X + \beta_1 Y + Z - \zeta_{01} - c_1 - \zeta_1},$$

$$z' = \zeta_{01} + \zeta_1 + f_1 \frac{Z - \zeta_{01} + l_1 - \zeta_1}{\alpha_1 X + \beta_1 Y + Z - \zeta_{01} - c_1 - \zeta_1}$$

et

$$x = \xi_2 + f_2 \frac{x' + \alpha_2 l_2 - \xi_2}{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + z' - \zeta_{02} - c_2 - \zeta_2},$$

$$y = \eta_2 + f_2 \frac{y' + \beta_2 l_2 - \eta_2}{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + z' - \zeta_{02} - c_2 - \zeta_2},$$

$$z = \zeta_{02} + \zeta_2 + f_2 \frac{z' - \zeta_{02} + l_2 - \zeta_2}{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + z' - \zeta_{02} - z_2 - \zeta_2}.$$

Le point (X, Y, Z) a pour image théorique un point (x_o, y_o, z_o) dont le calcul des coordonnées est long mais sans difficulté. Pour calculer les variations subies par ces coordonnées lors du décentrage des deux parties du système optique, appelons r_1 l'un des cinq éléments $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \alpha_1, \beta_1)$ de la déformation du premier système partiel, et r_2 l'un des cinq éléments $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \alpha_2, \beta_2)$ de la déformation du second système partiel. Les variations demandées sont

$$\Delta x = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial r_1} + \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial r_1} + \frac{\partial x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial r_1} \right)_o r_1 + \sum \left(\frac{\partial x}{\partial r_2} \right)_o r_2,$$

$$\Delta y = \sum \left(\frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial r_1} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial r_1} + \frac{\partial y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial r_1} \right)_o r_1 + \sum \left(\frac{\partial y}{\partial r_2} \right)_o r_2,$$

$$\Delta z = \sum \left(\frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial r_1} + \frac{\partial z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial r_1} + \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial r_1} \right)_o r_1 + \sum \left(\frac{\partial z}{\partial r_2} \right)_o r_2$$

où les dérivées partielles doivent prendre les valeurs particulières à un décentrage nul, et desquelles il reste à éliminer les coordonnées (x', y', z') du point intermédiaire, par le premier groupe des formules de transformation, au profit des coordonnées initiales (X, Y, Z), en annulant, dans ces formules les éléments de décentrage.

7. Enfin, et en toute généralité, que le système optique soit constitué de n systèmes de révolution théoriquement centrés sur la même droite, adoptée pour axe des (Z, z), et soient $(0, 0, \zeta_{oi})$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, les coordonnées des centres optiques de ces systèmes partiels dans leur position théorique. Les n systèmes partiels, dont les paramètres intrinsèques sont (f_i, c_i, l_i), subissent de petits décentrages indépendants $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i)$. Les coordonnées

$$x = x_n, \qquad y = y_n, \qquad z = z_n$$

de l'image finale du point

$$X = x_o, \qquad Y = y_o, \qquad Z = z_o$$

résultent de l'élimination des coordonnées (x_i, y_i, z_i), $(i = 1, 2, \ldots n-1)$, des images intermédiaires entre les $3n$ équations

$$x_i = \xi_i + f_i \frac{x_{i-1} + \alpha_i l_i - \xi_i}{\alpha_i x_{i-1} + \beta_i y_{i-1} + z_{i-1} - \zeta_{oi} - c_i - \zeta_i},$$

$$y_i = \eta_i + f_i \frac{y_{i-1} + \beta_i l_i - \eta_i}{\alpha_i x_{i-1} + \beta_i y_{i-1} + z_{i-1} - \zeta_{oi} - c_i - \zeta_i},$$

$$z = \zeta_{oi} + \zeta_i + f_i \frac{z_{i-1} + l_i - \zeta_i}{\alpha_i x_{i-1} + \beta_i y_{i-1} + z_{i-1} - \zeta_{oi} - c_i - \zeta_i},$$

$(i = 1, 2, \ldots n)$.

Soient $(x)_o$, $(y)_o$, $(z)_o$ les valeurs qu'auraient (x, y, z) si le décentrage était nul, $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ les variations

$$x - (x)_o, \quad y - (y)_o, \quad z - (z)_o$$

dues au décentrage, r_i l'un des éléments $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i)$ du décentrage du système partiel n° i.

Ce n'est que comme tel, et avant toute élimination de coordonnées d'image intermédiaire, que x est fonction de r_n ; de sorte que, dans Δx, les termes en r_n se réduisent aux seuls cinq termes calculés à partir des dérivées $\frac{\partial x_n}{\partial r_n}$. Quant aux éléments r_{n-1}, x en est fonction par l'intermédiaire de x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, et les éliminations ultérieures ne changent pas la manière dont il en est fonction ; il y a donc trois termes pour chacun des r_{n-1}, en tout quinze termes en r_{n-1}. Dans la même fonction x, les éléments r_{n-2} apparaissent après élimination de x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2} et les éliminations ultérieures n'en font pas apparaître de nouveaux ; la variation de x due à un r_{n-2} déterminé se fera donc par l'intermédiaire de l'une des fonctions $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ associée à l'une des fonctions $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$, et cette variation s'exprimera par la somme de neuf termes, d'où 45 termes relatifs aux divers r_{n-2}. Et ainsi de suite.

Écrivons μ^1, μ^2, μ^3,... des symboles dont chacun doive être remplacé par chacune des lettres x, y, z, de façon que l'association

$$\mu^1 \ \mu^2 \ \mu^3 \ \ldots \ \mu^k$$

doive être réalisée de 3^k manières. La variation de Δx due à r_i est représentée par la somme

$$r_i \sum_{\mu} \left(\frac{\partial x_n}{\partial \mu^1_{n-1}} \frac{\partial \mu^1_{n-1}}{\partial \mu^2_{n-2}} \cdots \frac{\partial \mu^{n-i-1}_{i+1}}{\partial \mu^{n-i}_{i}} \frac{\partial \mu^{n-i}_{i}}{\partial r_i} \right)_0$$

qui, pour $i = n$ se réduit au seul terme $r_n \dfrac{\partial x_n}{\partial r_n}$, et pour toutes les substitutions de (x, y, z) aux divers μ^1, μ^2, ... (les indices inférieurs restant en place) ce que rappelle l'indice de sommation μ, tandis que l'indice zéro à la dernière parenthèse indique qu'il faut, dérivées calculées, annuler dans celles-ci tous les éléments de décentrage.

Le même calcul doit être fait pour chacune des cinq valeurs de r_i, ce que rappellera un indice de sommation r ; enfin, on additionnera les influences de tous les décentrages partiels en donnant à i toutes les valeurs entières de 1 à n, ce que rappellera un indice de sommation i. Ainsi, et de même pour les déviations Δy, Δz :

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sum_i \sum_r r_i \sum_{\mu} \left(\frac{\partial (x_n, y_n, z_n)}{\partial \mu^1_{n-1}} \frac{\partial \mu^1_{n-1}}{\partial \mu^2_{n-2}} \cdots \frac{\partial \mu^{n-i-1}_{i+1}}{\partial \mu^{n-i}_{i}} \frac{\partial \mu^{n-1}_{i}}{\partial r} \right)_0 .$$

Des $5 \Sigma 3^{n-1} = 5 (3^n - 1)/2$ termes que renferme le second membre de chacune de ces expressions, il reste à éliminer successivement les coordonnées de toutes les images intermédiaires, au moyen des équations propres aux divers systèmes optiques partiels mais dont le décentrage est réduit à zéro.

Sur la démonstration de la condition des sinus d'Abbe

par M. A. Biot (1)

1. La condition des sinus d'Abbe s'exprime, ainsi qu'on le sait, de la manière suivante :

On considère : un système optique de révolution ; deux points A et A' correspondants au sens de la théorie de Gauss et situés sur l'axe optique. Si le point A est reproduit en A' sans aberration sphérique, la condition nécessaire et suffisante pour qu'à chaque point d'un élément de plan perpendiculaire à l'axe et passant par A corresponde sans aberration sphérique un point d'un élément plan perpendiculaire à l'axe et passant par A' est que l'on ait

$$ndy \sin u = n'dy' \sin u',$$

quels que soient u et u' correspondants.

Dans cette relation, n et n' représentent les indices de réfraction du premier et du dernier milieu respectivement ; u et u' les inclinaisons sur l'axe avant et après traversée du système d'un même rayon lumineux passant par A et A' ; dy et dy', des éléments correspondants au sens de la théorie de Gauss et perpendiculaires à l'axe optique respectivement en A et A'.

La démonstration directe la plus générale de cette relation est basée sur la considération des surfaces d'ondes et de leurs propriétés, en sorte que la nature des surfaces réfringentes est quelconque : ces surfaces sont seulement assujetties à être de révolution. La loi exprimée par la relation est donc très générale.

La démonstration dont nous parlons peut être présentée de plusieurs manières. Il semble toutefois que l'on puisse reprocher à certaines de ces démonstrations particulières certain manque de rigueur. L'objection peut se formuler comme suit :

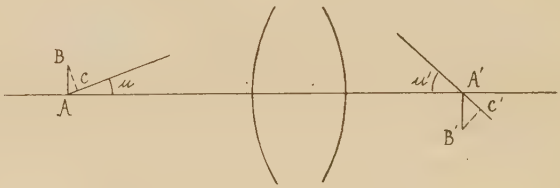
Si l'on considère les surfaces d'ondes sphériques évanouissantes en A et A', le rayon d'un élément de plan tangent à ces sphères n'est évidemment pas du même ordre que le rayon de l'élément de plan normal à l'axe optique dont il est question dans la proposition énoncée. Si ce dernier

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 164 de la première partie.

élément est du premier ordre, l'autre est du second. Or, il semble (au moins) que l'on considère parfois ces deux éléments de plan comme étant du même ordre.

On peut échapper facilement au reproche que nous venons de signaler : c'est le but de la note actuelle. La démonstration que nous donnons a, par ailleurs, l'avantage de montrer clairement l'ordre de grandeur des quantités que l'on considère, et aussi de montrer d'une manière assez générale comment sont traitées, dans le voisinage des points A et A′, les surfaces d'ondes qui peuvent y passer.

2. Le système étant de révolution autour de l'axe optique, considérons seulement ce qui se passe dans un plan méridien (fig.). Occupons-nous ici



seulement de la proposition directe.

Par hypothèse, les points A et A′, B et B′ sont correspondants au sens de la théorie de Gauss et, de plus, se reproduisent sans aberration sphérique. Les points B et B′ sont supposés pris dans le domaine paraxial. Nous allons démontrer que l'on a dans ces hypothèses

$$n\mathrm{AB}\sin u = n'\mathrm{A'B'}\sin u'.$$

Montrons d'abord que les chemins optiques, mesurés dans le domaine paraxial, entre A et A′, B et B′ sont égaux : $(\mathrm{AA'}) = (\mathrm{BB'})$.

Si l'on considère dans le premier milieu une surface d'onde astreinte à la condition d'être normale à l'axe optique et aussi à celle de passer par A, mais qui n'est pas évanouissante en ce point ou en son voisinage, cette surface d'onde, après traversée du système et lors de son passage en A′, sera toujours normale à l'axe optique. De plus, les éléments de plans tangents menés aux deux ondes en A et A′ se correspondront : la distance optique entre deux points de ces plans tangents est une constante. En d'autres termes, les distances optiques (AA′), (BB′) sont égales.

Comme, par ailleurs, les rayons émanés de A et B sous une inclinaison quelconque avec l'axe optique convergent après réfraction en A′ et B′ respectivement, il est évident que les chemins optiques mesurés sur n'importe quel rayon sont les mêmes entre A, A′ et B, B′.

Considérons maintenant un rayon émané de A sous un angle quelconque

u. Menons BC normal à AC ; BC est, comme AC, une longueur du premier ordre. Considérons encore une surface d'onde quelconque passant par C, normale à AC et non évanouissante en A ou en son voisinage. BC est dans le plan tangent en C à cette surface d'onde. Après réfraction, cette onde est normale au rayon réfracté A'C' et quand elle passe par le point B' (au second ordre près) elle renferme la droite B'C' perpendiculaire à A'C'. De même que plus haut pour AB et BC, A'B' et B'C' sont du premier ordre.

Il suit de là que le chemin optique (CC') égal au chemin optique (BB') est aussi égal au chemin optique (AA'). On peut donc écrire

$$(AC) = (A'C')$$

ou

$$n\text{AB} \sin u = n'\text{A'B'} \sin u' ;$$

c'est la relation qu'il fallait démontrer.

3. La condition démontrée peut s'énoncer comme suit :

Si un système optique de révolution reproduit sans aberration sphérique le point A de l'axe en A'. pour que le point B, *infiniment* voisin du point A sur une perpendiculaire à l'axe, soit reproduit sans aberration sphérique en B' image de Gauss du point B, il faut que l'on ait

$$n\text{AB} \sin u = n'\text{A'B'} \sin u'.$$

Nous n'insisterons pas sur la démonstration de la proposition inverse, démonstration que l'on peut faire très simplement par l'absurde.

N° 38.

L'électricité atmosphérique

par le R. P. H. Dopp (1)

—

Première partie

La Terre se comporte comme un conducteur chargé d'électricité négative ; son atmosphère est un champ de force où se déplacent des masses électriques dont l'éclair et le tonnerre sont une des manifestations, la plus éclatante et la plus bruyante. Pour mieux comprendre ces phénomènes de la nature, pour en déceler les particularités, la science bénéficie des progrès qu'elle réalise dans la connaissance des phénomènes électriques provoqués en laboratoire.

Il y a quelque vingt-cinq ans, la Revue a publié un aperçu général remarquable de l'état des recherches relatives à l'électricité de l'atmosphère (1). On voudrait indiquer ici les aspects nouveaux de cette étude, les faits acquis par l'observation et les hypothèses d'interprétation les plus plausibles (2). Comme dans la précédente mise au point, on se trouve obligé, vu la complexité des rapports entre l'électricité de l'air et les autres facteurs météo-

(1) Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 10 (1926, 2), p. 5.

(1) R. P. V. Schaffers, S. J., *L'origine de l'électricité atmosphérique*. Rev. Quest. sc., t. 48 (1900), pp. 426-453.

(2) Bibliographie. *Traité d'électricité atmosphérique et tellurique*, publié sous la direction de E. Mathias. Paris, Presses Univ. de France, 1924. — *Électricité atmosphérique*, par B. Chauveau. Trois fascicules. Paris, Doin, 1922, 24, 25.— *Die Luftelektrizitaet*. par A. Gockel, 1908. Un mémoire du Dr Gockel, *Luftelektrische Beobachtungen im Schweizerischen Mittelland, im Jura und in den Alpen*, paru dans les Nouveaux Mémoires de la Société Helvétique des Sciences Naturelles, vol. LIV, mém. 1. Zurich, 1917.— Nombreux articles *passim* dans Physikalische Zeitschrift, Physical Review, Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, Boletin mensual del Observatorio del Ebro.

rologiques, tels que les nuages, le brouillard et la pluie, de limiter l'exposé de la question au cas de l'atmosphère calme et sereine.

Deux physiciens allemands, Elster et Geitel, entrèrent en 1899, dans une voie nouvelle d'interprétation de l'électricité atmosphérique, en tirant parti des découvertes récentes concernant l'ionisation de l'air, c'est-à-dire l'existence de particules, ou ions, chargées d'électricité.

Leur théorie n'était qu'ébauchée ; il n'en subsiste plus que le point de départ ; mais cette idée admirablement féconde a permis de diriger systématiquement les recherches. On peut espérer élucider bien des énigmes de ce problème cosmique, en multipliant d'une part les observations sur l'état d'ionisation de l'atmosphère, et en démêlant expérimentalement d'autre part les causes de l'ionisation et de ses variations.

Le présent rapport exposera par quels genres d'observations et de mesures l'électricité est discernable en tout temps dans l'atmosphère ; il notera les résultats généraux des expériences faites, et passera ensuite en revue les hypothèses actuellement les plus plausibles pour rendre compte de l'existence et des propriétés de l'électricité atmosphérique par temps calme et serein.

I. — LE CHAMP ÉLECTRIQUE

Appareils et mesure

La méthode universellement employée pour étudier le champ électrostatique de l'atmosphère consiste à observer la différence de potentiel entre deux points de ce champ. On connaît le principe de cette mesure et de l'appareil qui la fournit. L'électromètre est constitué par un système conducteur mobile ou déformable mis en communication électrique avec une prise de poten-

tiel au point du champ qu'il s'agit d'observer. Les parois fixes de l'appareil sont élevées à un potentiel connu, ou bien reliées au sol ou à une prise de potentiel placée en un autre point du champ. Les déformations, ou les déplacements du système intérieur par rapport aux parois permettent de repérer et même de mesurer la différence de potentiel, soit entre les deux points du champ, soit entre le premier point et le sol ou le potentiel connu.

L'intensité de la force électrostatique est caractérisée par une grandeur que l'on déduit de la différence de potentiel, exprimée en volts, en la divisant par la distance, en mètres, des surfaces d'égal potentiel correspondantes. C'est ce qu'on appelle le gradient du potentiel ; il est mesuré en volts par mètre.

Nous allons passer en revue les moyens ordinaires d'amener l'équipage mobile de l'électromètre au potentiel du point à explorer, les modèles d'électromètres généralement adoptés, les procédés d'enregistrement du potentiel. Nous signalerons en passant les particularités qui distinguent les appareils suivant les conditions imposées à l'observation, d'après qu'elle se fait dans un poste fixe, en campagne, ou sur mer, ou en ballon.

Collecteur. — Divers moyens permettent d'amener le système mobile de l'électromètre au potentiel d'un point déterminé du champ. Quand on réunit ce point à l'appareil par un conducteur isolé, ce conducteur subit l'influence électrostatique : des charges de signe contraire s'y dissocient et s'accumulent principalement aux deux extrémités. Le potentiel du conducteur est celui de la ligne neutre de démarcation entre les charges ainsi séparées par influence. Si l'on peut laisser échapper ou neutraliser ces charges à un endroit, le conducteur entier prend le potentiel du champ en cet endroit. On appelle ce système égaliseur de potentiel ou plus simplement collecteur.

L'équilibre de potentiel s'obtient plus ou moins rapidement et plus ou moins parfaitement. La vitesse de son établissement, ou de ce qu'on peut appeler le nivellement, est définie par l'inverse du temps, mesuré en secondes, nécessaire pour que la différence de potentiel entre le conducteur et le point de prise du champ soit réduite au centième. Cette vitesse est d'autant plus grande, évidemment, que la capacité du conducteur est moindre et son isolement plus parfait.

Le collecteur à pointe, employé le premier par Franklin, n'assure pas un nivellement rapide, ni complet, ni avec un point de prise bien localisé. Il est abandonné aujourd'hui.

Dans le collecteur à flamme (Volta), l'extrémité du fil se charge ou se décharge par les ions de la flamme. Le nivellement est rapide ; avec une capacité de 20 cm, 30 secondes suffisent pour la réduction au centième. Mais les ions de la flamme modifient la répartition du champ à mesurer. De plus, le point de prise est plus ou moins indéterminé ; on arrive à le connaître par comparaison avec les indications d'un collecteur à liquide ; il dépend en tout cas de la hauteur de la flamme, et celle-ci varie aisément dans les endroits exposés. Des coups de vent font osciller l'électromètre, quand même ils n'éteignent pas complètement la flamme.

On a employé, notamment dans les ascensions en ballon, des collecteurs à mèche (Lord Kelvin), combustible sans flamme ni étincelle, mais avec dégagement d'une fumée épaisse. On doit y tenir compte de la différence de potentiel due au fait de la combustion, et avoir égard au recul du point en ignition de la mèche.

Dans le collecteur (W. Thomson) à liquide (généralement de l'eau, solution de sel, additionnée d'alcool, ou chauffée, s'il s'agit d'observations par basses températures comme dans les montagnes ou en ballon), l'égalité de potentiel s'établit à l'endroit où le liquide, qui s'écoule

d'un ajutage fin, se divise en gouttelettes. Le nivellement est d'autant plus rapide que la capacité du collecteur est moindre, les gouttelettes plus nombreuses et plus fines. Ce collecteur une fois en équilibre n'émet pas de charges électriques. Aussi est-ce lui qu'on emploie de préférence dans les observations à poste fixe, surtout quand il doit se trouver dans le voisinage d'appareils compteurs des ions de l'atmosphère. Un réservoir porté par un support isolé alimente le jet, par un long tuyau également isolé ; pour que les gouttes se séparent toujours à la même hauteur, la pression du liquide est maintenue constante, par un régulateur de niveau dans le réservoir ou par un régulateur de pression sur la surface libre du liquide. La réserve de liquide est renouvelée par un distributeur automatique. Souvent on établit une communication entre le collecteur et le sol pendant le remplissage, car il faut évacuer les charges qu'apporterait le liquide ou qu'il produirait en tombant dans la couche précédente. Cette manœuvre amène à zéro le potentiel du collecteur ; mais, après l'interruption du contact du sol, il reprend le potentiel du champ. Plus les gouttes sont petites, disions-nous, et plus rapidement s'établit l'équilibre ; moins souvent aussi doit-on renouveler la provision. En remplaçant l'ajutage d'écoulement par une sorte de minuscule pomme d'arrosoir, on réduit la dimension des gouttelettes et on fixe mieux la zone de neutralisation, même dans le vent. Certains collecteurs se terminent par un véritable pulvérisateur ; ils ne dépensent que 3 ou 4 cc par minute et n'exigent que de 13 à 20 secondes pour que soit assuré le nivellement au centième de la différence primitive.

Les collecteurs radioactifs sont moins encombrants et d'installation plus aisée. Ils portent à leur extrémité, sur une surface de quelques cm, un sel radioactif (sulfate ou chlorure de radium, polonium, ionium). Cette préparation ionise plus ou moins intensément l'espace environ-

nant, et le collecteur prend le potentiel de l'endroit grâce aux ions qu'il perd ou qui viennent se décharger sur lui. Toutefois le rayonnement du sel, surtout la radioactivité de l'émanation de radium, change la configuration du champ à étudier. Aussi s'efforce-t-on de le réduire au minimum ; on choisit des substances d'activité moyenne ; on les enveloppe dans un tube de métal, par exemple du plomb, dont les parois absorbent, sauf dans la direction de l'axe, la majeure partie des ions et des radiations ionisantes, et l'on couvre le sel d'un émail impénétrable à l'émanation. Le nivellement au centième de la différence primitive s'opère en une vingtaine de secondes pour des modèles courants à préparation non enveloppée dans une gaine absorbante ; il y faut une minute et demie environ lorsque le dépôt radioactif est contenu dans un tube absorbant, et plus, lorsque le vent dépasse 3 ou 4 mètres par seconde. Dans un air confiné, qui ne pourrait pas se renouveler assez vite, les indications de ces collecteurs sont inexactes. D'autre part exposés à l'air libre, elles varient jusqu'à 10 ou 15 % d'après la direction et l'intensité du vent, car les ions ramenés sur le collecteur rendent son isolement défectueux. De plus, les ions dégagés s'ajoutent à ceux que contient déjà l'atmosphère environnante ; ils fausseraient les observations de l'état d'ionisation de l'air que l'on fait souvent, comme nous le verrons, précisément à proximité de la prise de potentiel.

Néanmoins l'installation d'un tel collecteur est si facile qu'on l'adopte souvent pour les postes mobiles. Par exemple, on y a eu recours dans l'équipement du *Carnegie*, le navire sans fer gréé par l'institution américaine qui porte le nom de ce Mécène, pour l'exploration du magnétisme et de l'électricité terrestres. Le collecteur est une tige de laiton (10 mètres environ), mobile autour d'un axe horizontal isolé. Il porte à son extrémité une sorte d'ombrelle de gaze imprégnée d'ionium. La

cage de l'électromètre (Wulf, bifilaire) est rattachée électriquement au navire. Certains observatoires l'emploient même pour leurs postes fixes. Au Val-Joyeux (Villepreux, Seine-et-Oise), l'installation qui fonctionne depuis le 1er mars 1923 pour l'Institut de physique du globe de l'Université de Paris, est pourvue d'un collecteur formé par un fil métallique de 16,5 m. de long qui porte en son milieu un disque de sulfate de radium de 6 cm de diamètre. Le fil est tendu à 2 m environ au-dessus d'une pelouse unie.

Électromètres. — Les électromètres généralement employés dans les postes fixes sont des électromètres à quadrants du type de W. Thomson adapté par Mascart : l'aiguille mobile horizontale en forme de huit portée par un fil de torsion ou une suspension bifilaire est une armature d'un double condensateur électrostatique ; les autres armatures sont des quarts de disque, dont les quartiers opposés sont reliés par paires aux deux pôles d'une force électromotrice connue.

Dans les postes mobiles l'électromètre transportable d'Exner fut souvent employé. Le système déformable isolé y est constitué par deux feuilles de métal (or, aluminium) qui s'écartent l'une de l'autre en fonction du potentiel.

A présent on utilise plus généralement l'électromètre du Père Wulf. L'équipage isolé y consiste en deux fils conducteurs très fins (quartz étiré recouvert de platine par pulvérisation cathodique, ou filaments métalliques) réunis par le haut au bouton de l'appareil, et retenus en bas par un anneau flexible de quartz. La tension mécanique des fils, dont dépend la sensibilité de l'électromètre, est susceptible d'un réglage délicat dans des limites assez étendues. La position des fils s'observe très nettement sur une échelle micrométrique ; leur écartement,

dans un large intervalle de variation (de 0 à 250 volts) est très approximativement proportionnel au potentiel.

Il existe également un type d'électromètre Wulf plus récent, à un fil tendu entre les armatures d'un condensateur plan chargées à un potentiel connu.

Enregistrement. — Le gradient du potentiel atmosphérique varie sans cesse ; il est important de pouvoir enregistrer de façon continue ses valeurs. W. Thomson déjà construisit un appareil enregistreur. Il inscrivait les déplacements de l'aiguille de son électromètre en projetant une fine raie lumineuse, par un miroir solidaire de l'aiguille, sur une feuille de papier photographique déroulée par un mouvement d'horlogerie. On se sert encore de ce dispositif à l'observatoire de Tortosa. La feuille de papier est renouvelée chaque jour. Le rouleau se déroule à raison de 22 mm à l'heure, ce qui permet un pointage du temps à 20 sec près. Cet enregistrement photographique est remarquablement aisé avec l'électromètre Wulf, dont les fils eux-mêmes peuvent être projetés sur le papier sensible. Celui-ci mesure 1 m, et se déroule en une semaine. Le mouvement d'horlogerie ramène automatiquement toutes les heures les fils au zéro, ce qui trace un point de repère pour l'estimation du temps.

La photographie est incontestablement le mode d'enregistrement le plus fidèle ; mais outre la dépense de la source lumineuse et du papier sensible, il exige des manipulations en chambre noire et le renouvellement fréquent de la bande inscriptrice. Mascart eut recours à un enregistrement mécanique, reproduit ensuite par Benndorff. Ce système est employé dans beaucoup de postes fixes, et notamment au Val-Joyeux. L'électromètre est du type à quadrants. L'aiguille porte un index allongé, dont un électro-aimant actionné à des intervalles de temps assez rapprochés (une minute, au Val-Joyeux),

appuie l'extrémité sur du papier carbone. La position de l'index est ainsi marquée sur une bande de papier qui se déroule au-dessous d'un mouvement uniforme. Au Val-Joyeux, ce papier se déplace de 4 cm à l'heure. Un écart latéral de 9 mm pour la position de l'index y correspond à un champ de 100 volts par mètre.

Les amplitudes de variation du gradient-potentiel dépassent assez souvent de beaucoup la moyenne. Les électromètres adaptés à la mesure des variations normales, sont trop sensibles pour les plus considérables, de 5 à 10 fois plus amples parfois. On emploie donc dans certains observatoires un second électromètre, moins sensible, pour enregistrer également les perturbations au moins relativement modérées. A Tortosa, les indications des deux électromètres s'impriment d'une manière continue sur la même bande de papier sensible, où s'inscrivent d'ailleurs les données d'autres appareils encore. Ailleurs, par exemple au Val-Joyeux, on utilise simultanément deux enregistreurs Benndorff de sensibilité différente.

Emplacement. — Le choix de l'emplacement des appareils de mesure est de la plus haute importance. En effet, les accidents du sol déforment considérablement les surfaces de niveau du champ ; au-dessus d'une surface plane suffisamment étendue, les surfaces équipotentielles sont parallèles au sol ; tandis qu'autour des aspérités, collines, arbres, maisons, elles se resserrent pour les contourner ; ainsi, au-dessus d'une région accidentée, ce n'est qu'à une certaine hauteur que les surfaces de niveau deviennent parallèles au plan moyen du sol.

Pour rendre comparables les observations faites dans des conditions locales très différentes, il faut donc les réduire à des conditions normales. C'est ainsi qu'on définit le gradient du potentiel à la surface du sol, comme la différence de potentiel mesurée entre le sol et un point

situé à un mètre plus haut dans un endroit bien dégagé, par exemple au-dessus d'une prairie assez étendue.

Certains postes d'observatoires sont installés dans ces conditions, par exemple au Val-Joyeux et à Upsal ; pour que les appareils eux-mêmes y déforment le moins possible la répartition des surfaces de niveau, la prise du champ s'opère au milieu d'un fil conducteur isolé de plus de 10 mètres suspendu sous une tension constante à une hauteur bien déterminée (1,91 m au Val-Joyeux) parallèlement au sol. Cette prise est en communication sous gaine isolante avec l'électromètre enregistreur qui est abrité dans une cabine basse à une distance telle que les surfaces de niveau n'en sont pas influencées dans le voisinage du point de prise.

Ces postes d'observation directe de ce qu'on appelle la valeur absolue du gradient sont l'exception ; partout ailleurs les résultats de l'observation directe sont purement relatifs, ils ne se prêtent donc qu'à une étude des variations relatives du champ au même endroit, dans les mêmes conditions locales de mesure. Pour donner à ces résultats une signification qui permette la comparaison avec ceux d'une mesure absolue du champ, il faut les multiplier par ce qu'on appelle le facteur de réduction au plan. Ce facteur se détermine expérimentalement par le rapprochement avec des observations simultanées faites le plus près possible du poste en question dans les conditions normales. Malheureusement le facteur de réduction n'est pas rigoureusement constant ; il le serait si les accidents de terrain déformaient seuls les surfaces équipotentielles ; mais, comme on le verra plus loin, la présence de substances radioactives et d'ions en quantités variables, surtout à proximité des bâtiments et des centres habités, influe diversement sur le champ dans des endroits même assez rapprochés l'un de l'autre (1).

(1) B. Chauveau rapporte un exemple frappant de l'incertitude qui résulte de la réduction des observations au plan. A Kew, la

La précision de la détermination expérimentale du coefficient de réduction ne dépasse pas 1/10. Ce fait ne doit pas être perdu de vue quand il s'agit d'interpréter les observations en valeur absolue. Il ne s'oppose heureusement pas à ce qu'on compare directement entre elles les mesures faites au même endroit, pour en saisir les variations relatives.

Variations du champ

1. *Variations accidentelles.* — Avant d'énoncer les quelques lois générales qui semblent se dégager de plus en plus des observations régulièrement enregistrées, il importe de signaler l'importance des variations accidentelles, imputables, en gros tout au moins, et sans qu'on puisse encore en démêler l'écheveau complexe, aux facteurs météorologiques.

La *température* exerce une influence, directe ou indirecte, sur le gradient du potentiel. Le P. Zölss, à Kremsmünster, a observé que pour une augmentation de 50° de température au même endroit, le gradient diminue dans la proportion de 3 à 1 ; mais on n'a pu reconnaître aucune relation entre les valeurs observées simultanément en divers endroits pour des températures différentes de l'un à l'autre.

Déjà en 1889, Hann découvrit une correspondance entre les courbes du baromètre et de l'électromètre, les maximums de l'une répondent souvent aux minimums de l'autre et réciproquement ; mais cette influence de la *pression atmosphérique* sur le champ au voisinage du sol, s'il paraît bien qu'elle existe, est fréquemment effacée par d'autres.

valeur moyenne absolue du champ avait été estimée à 159 volts d'après un premier procédé de réduction, après 15 ans d'observations enregistrées ; or, en recourant à un procédé plus correct de la mesure directe du champ, on fut amené en 1915 à estimer cette valeur à 304 volts, soit près du double.

Le *vent*, qui transporte des charges électriques, modifie sensiblement et brusquement le champ. On remarque que les irrégularités de celui-ci se produisent et cessent en même temps que le vent ; elles sont plus fréquentes pendant la journée que pendant la nuit. Indépendamment de cela, le vent diminue généralement le champ, sauf dans certains cas bien déterminés, par exemple le foehn chaud et sec qui descend des Alpes en Suisse, et la bora à Trieste, augmentent beaucoup le gradient.

L'influence de l'*humidité* de l'air en chaque poste n'est pas nettement accusée. Le champ ne diminue pas, comme on l'a cru, lorsque augmente la pression de vapeur. Mais il est plus intense en moyenne dans les régions sèches que dans les régions humides, et pendant les saisons sèches que pendant les saisons humides. L'effet du *brouillard*, d'après Norinder, est d'augmenter le gradient. Celui-ci diminue lorsque croît la visibilité.

Les *nuages* bas, stratus et nimbus font baisser le gradient jusqu'aux deux tiers de sa valeur normale, par temps couvert. Les cirrus, à 5 000 et jusque 10 000 m, ne semblent avoir qu'une action négligeable au voisinage du sol. Toutefois leur apparition, d'après Dufour à Lausanne et Gockel à Fribourg, est annoncée parfois par d'importantes variations brusques de plusieurs centaines de volts, en plus ou en moins. Les nuages d'orage agissent puissamment tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, suivant le signe de leur charge, et l'on a observé sous eux des champs positifs (force électrique dirigée vers le sol) atteignant plus de 200 000 volts par mètre, et des champs négatifs de 175 000 v/m.

Les *précipitations* sont accompagnées de variations brusques et irrégulières du gradient. La *brume*, constituée par des gouttelettes fines, mais dépassant les dimensions de celles du brouillard — qui mesurent au plus 1/100 mm de diamètre — diminue le champ électrique ; elle entraîne donc vers le sol un excédent de charges posi-

tives. La *pluie* a le même effet, généralement, sur le continent, sinon à la surface de la mer, mais plus intense, et elle peut même souvent renverser le signe du champ. Les *pluies fortes* et les *giboulées* causent des fluctuations rapides, dont la durée ne dépasse pas quelques minutes, allant jusqu'à des milliers de volts par mètre, en plus ou en moins. La *neige* aussi entraîne des troubles considérables du gradient ; celui-ci pouvant s'élever à une valeur double et davantage.

Pour faire de la clarté dans l'étude des phénomènes, il semble donc nécessaire d'étudier d'abord ceux qu'offre le champ électrique de l'atmosphère *par temps à la fois calme et serein*. Même dans ces conditions, on observe parfois des oscillations fortes et brèves ; mais celles-ci n'entraînent qu'assez rarement un renversement du champ, sauf en certains postes, comme à Batavia, où, sans doute par suite des conditions locales, le champ est régulièrement renversé. Il serait désirable que les observateurs s'entendent sur la définition des conditions météorologiques qui ont accompagné chacun de leurs relevés, en adoptant des règles uniformes pour classer les perturbations dans un ordre d'importance et calculer les moyennes. Après ce qui a été dit plus haut, on voit que les observations au sol sont sujettes à de nombreuses fluctuations dues uniquement à des causes locales, dont l'importance masque les variations régulières d'ensemble. Cela apparaîtra encore mieux par la suite.

Il est possible toutefois de dégager dès à présent quelques faits d'ordre plus général.

Champ normal. — Par beau temps, le champ normal est normalement positif (force électrique dirigée vers le sol) ; sa valeur moyenne est de l'ordre de 100 volts par mètre, mais avec de considérables différences d'un observatoire à l'autre ; sans qu'on ait pu encore reconnaître sûrement une dépendance de la latitude ; sur

l'océan, elle apparaît du même ordre de grandeur que sur la terre ferme.

A titre d'indication, voici quelques chiffres (1).

Kew (Anglet.)	Tortosa (Esp.)	Davos (Suisse)	Kremsmünster (Autriche)	Karasjok (Laponie)	Samoa
15 ans	7 ans	2 ans	10 ans	1 an	3 ans
moy. 304 v.	114 v.	64 v.	107 v.	139 v.	38 v.

Norinder a étudié avec soin les variations du champ avec l'*altitude au voisinage du sol.* Par une première méthode, en disposant des collecteurs horizontaux à 1 m, 2 m et 3 m du sol, il mesura comme moyenne annuelle, à Upsal (Suède), 8 v. entre 0 et 1,55 m, 57,5 v. entre 1 m et 2 m, 65,5 v. entre 2 m et 3 m. Ensuite, à Brunna, en disposant un fil collecteur à des distances variables du sol jusqu'à une hauteur de 15 mètres, il observa que lorsque le sol n'est pas couvert de neige le gradient diminue d'abord de 5 unités depuis le sol jusqu'à 0,75 m, puis augmente jusqu'à un maximum, situé vers 5 mètres en hiver, et vers 10 mètres et plus en été.

Le gradient du potentiel subit donc d'importantes modifications sous des influences purement locales à proximité du sol. Malheureusement c'est presque uniquement là qu'on peut le mesurer. Des recherches ont cependant été faites à diverses altitudes, généralement à bord de ballons libres. Aux différentes altitudes, on observait la différence de potentiel entre deux égaliseurs (à mèche ou radioactifs), situés à deux endroits déterminés du champ. L'enveloppe semi-conductrice de l'aérostat déforme notablement les surfaces de niveau. Pour un ballon haut de 24 m, on a trouvé sur un modèle en laboratoire, que la ligne neutre du conducteur qu'il constitue est à 7 m au-dessus du fond de la nacelle. La

(1) *Électricité atmosphérique*, II, p. 124.

déformation du champ disparaît à 8 ou 10 m au-dessous de celle-ci. En abaissant donc suffisamment les deux prises de potentiel, distantes d'une longueur connue suivant la verticale, il est possible de mesurer la valeur du champ. On le peut encore plus sûrement si l'on dispose une troisième prise au-dessous de la seconde à une distance égale de la première. On reconnaîtra que le champ n'est plus déformé au niveau de l'observation par l'égalité de différence de potentiel entre la troisième et la deuxième prise, et entre la deuxième et la première. Mais il faut tenir compte aussi de la charge initiale que le ballon emporte du sol, ainsi que de celle qui résulte de l'emploi du lest. Le sable, surtout quand il est sec, en s'écoulant se charge d'électricité négative et charge le ballon en signe contraire. Gerdien étudia l'importance de cette cause d'erreur. Dans une ascension où il ne se servit d'abord comme lest que de l'eau, il mesura un gradient de 8 v/m; le gradient s'éleva à 45 v/m, quand il se fut délesté en laissant s'écouler quelques kgr de sable. Par temps clair les rayons ultraviolets du soleil peuvent également charger l'enveloppe. Pour s'affranchir autant que possible de ces charges parasites, le mieux est de disposer à hauteur de la ligne neutre du ballon un égaliseur de potentiel qui en permette l'écoulement.

Des mesures directes faites jusque 1904, et qui ne semblent guère avoir été renouvelées, bien que beaucoup d'autres observations aient été faites à des altitudes élevées, Linke a déduit que si l'on compte 100 pour le gradient au niveau du sol, la diminution est rapide, du moins à partir de 1500 m ; à cette altitude il faudrait compter le gradient à 25 ; il ne serait plus que 10 à 4000 m et 8 à 6000 m. Dans les couches atmosphériques inférieures à 1500 m, la loi de variation n'est pas déterminée encore. Jusqu'aux plus hautes altitudes atteintes dans ces observations, 8000 et 9000 m, on trouve toujours une certaine intensité positive du champ ; on déduit

de là qu'il existe dans l'atmosphère, depuis l'altitude 1 500 au moins et au-dessus de 9 000 m, un excès de charges positives.

2. *Variations régulières.* — Les difficultés qui se présentent dans la détermination de la valeur absolue du gradient à proximité du sol ne se rencontrent plus lorsqu'on peut se contenter de comparer les valeurs observées à un endroit fixe à l'aide d'appareils déterminés. Ces valeurs relatives suffisent pour servir de base à l'étude des variations du gradient en cet endroit. Étant données les variations brusques accidentelles, on comprend qu'il faille prendre des précautions pour découvrir les lois des variations régulières ; malgré le nombre assez élevé d'observations dont on dispose actuellement, du moins pour la zone tempérée de l'hémisphère nord, ces lois ne se dégagent encore guère. Pour les découvrir on ne peut s'appuyer que sur les documents fournis par les appareils enregistreurs, en éliminant, par l'omission des jours perturbés, d'après certains indices caractéristiques dont la signification devrait être bien précisée, les causes d'erreur qui seraient dues à des variations accidentelles. Même pour les jours calmes et sereins, il est encore nécessaire de faire des moyennes horaires pour reconnaître l'allure régulière des variations. En effet, en des stations voisines, distantes seulement de quelques kilomètres, et d'altitude à peu près égale, on a pu relever à la même heure, par temps calme et ciel serein, des gradients différant dans la proportion de 1 à 3. L'effet de ces variations accidentelles disparaît dans le calcul des moyennes horaires. Grâce à celles-ci, on peut reconnaître des variations régulières, diurne et annuelle.

Variation diurne. — Par des observations suivies, au cours de longs voyages à bord du *Carnegie*, et relevées sur l'océan en des points assez bien répartis sur la moit é

du globe, Mauchly, en 1921, a mis en relief une oscillation unique, dont la période est égale au jour de 24 heures, avec un minimum vers 4 h et un maximum vers 19.30 h du temps moyen de Greenwich, simultanément partout. L'amplitude de cette oscillation est le plus élevée pendant la saison froide, et vaut alors 15 % du gradient moyen. Il s'y ajoute des variations locales dont l'amplitude atteint parfois sur mer en été les 3/4 de l'amplitude diurne.

Sur terre, à la surface du sol (1) on observe deux types nets de variation diurne régulière, au moins en dehors des zones équatoriales et tropicales (sur lesquelles on est insuffisamment documenté). Le premier type est celui de la saison chaude. Son diagramme accuse deux minima, l'un entre 3 et 5 heures locales, l'autre entre 12 h et 16 h, et deux maxima, l'un quelques heures après le lever du soleil, de 7 à 10 h, et l'autre suivant de plus près son coucher, de 19 à 21 h, à des époques qui varient dans le même sens que le lever et le coucher du soleil mais beaucoup moins. Le premier minimum et le second maximum semblent dus à une cause générale, on les trouve partout et toute l'année ; les deux autres valeurs extrêmes du gradient sont dues à des influences locales, dont l'action est forte surtout à la saison chaude.

Le second type de variation diurne est celui de la saison froide ; c'est presque une onde simple dont le minimum a lieu, comme le précédent, vers la fin de la nuit, et le maximum vers la fin du jour. L'amplitude de l'oscillation en hiver étant plus élevée que celle d'été, elle se traduit par un diagramme moins festonné, même quand elle est accompagnée pendant la journée d'une oscillation secondaire locale ; celle-ci est relativement beaucoup plus faible.

Aux latitudes élevées, la variation diurne régulière

(1) Norinder a trouvé que le gradient varie de la même manière à toutes les hauteurs depuis le sol jusqu'à 9 m.

garde toute l'année le type simple propre à la saison froide.

De même, plus on s'élève en altitude, plus la variation diurne se rapproche de ce type. A 3 000 m la double oscillation ne paraît plus, semble-t-il, même en été. Voici quelques chiffres, à titre d'indication (1). Au-dessous du nom de chaque station le tableau marque, pour l'hiver et pour l'été, sur la première ligne la valeur saisonnière du gradient, sur la seconde et la troisième les rapports à la valeur diurne moyenne des variations du potentiel entre le maximum principal (celui du soir, sauf en été à Davos et à Kremsmünster), et le minimum de la nuit, A*n*, deuxième ligne, ou le minimum de la journée, A*d*, troisième ligne. Le rapport des deux chiffres, A*n* et A*n*, indiqué dans la quatrième ligne caractérise l'importance relative des minima.

	Kew	Tortosa	Davos	Kremsmünster	Karasjok (2)
	15 ans	7 ans	2 ans	10 ans	1 an
	H. E.	H. E.	H. E.	H. E.	H. E.
	405 v 213 v	130 v 100 v	94 v 41 v	147 v 82 v	181 v 97 v
An	0,40 ; 0,48	0,51 ; 0,54	0,80 ; 1,00	0,82 ; 0,55	0,87 ; 0,56
Ad	0,18 ; 0,46	0,17 ; 0,43	0,29 ; 0,74	0,31 ; 0,17	» »
An Ad	2,22 ; 1,04	3,00 ; 1,26	2,76 ; 1,65	2,65 ; 3.24	» »

Variations annuelles. — La variation régulière annuelle du gradient est encore moins bien connue que la variation diurne. Toutefois la courbe du gradient moyen mensuel accuse une oscillation annuelle simple, le maximum a lieu en hiver, en janvier ou février dans la majorité des stations de l'hémisphère boréal ; dès avant le printemps le gradient décroît rapidement et se maintient constamment près de sa valeur minima pendant tout l'été. Dans les postes de la zone tempérée sud, on observe la même oscillation, dépendant de la saison, maximum en juillet

(1) Chauveau, *op. cit.*, II, p. 123.

(2) Même durée des observations qu'au tableau, p. 18.

(hiver), minimum en janvier (été). Toutefois, chose remarquable, sur le continent polaire de l'hémisphère sud, la variation annuelle prenant ses valeurs extrêmes aux mêmes mois que dans l'hémisphère nord, paraît dépendre non pas de la saison, mais du rapprochement du soleil, le gradient prend sa valeur maxima lorsque la Terre est plus près de son périhélie. A des altitudes suffisamment élevées, l'amplitude de la variation annuelle du potentiel semble fortement réduite, ainsi d'ailleurs que celle de la variation diurne. On peut en déduire que la cause de ces variations doive être recherchée dans les couches atmosphériques inférieures à ces niveaux (3 000 mètres); et l'on peut se demander si à des hauteurs plus considérables encore les variations du champ électrique terrestre ne tendent pas à s'effacer complètement.

La question d'une variation régulière cyclique du gradient du potentiel, en rapport avec la période undécennale de l'activité du soleil, est chaudement débattue actuellement entre Bauer et Chree. Le premier croit l'établir sur les résultats accumulés dans certains observatoires, et récuse les données fournies par d'autres observatoires, apparemment en contradiction sur ce point. Ce débat dont l'exposé exigerait trop de développements, prouve une fois de plus que l'interprétation des observations faites et des moyennes établies dans ce domaine météorologique nouveau exige une critique affinée.

L'influence des éclipses du soleil, qui semble avoir été reconnue dans certaines variations brusques du potentiel, est récusée notamment par Chauveau, parce qu'elle ne s'est pas manifestée dans des circonstances où on n'aurait pu manquer de l'apercevoir.

II. — LES IONS DE L'ATMOSPHÈRE

Une voie nouvelle a été ouverte pour l'étude de l'électricité atmosphérique, lorsqu'on découvrit la présence

dans l'air de particules électriques mobiles, ou ions, qui se déplacent sans cesse à la façon des molécules gazeuses. Schuster avait le premier, en 1877, interprété par cette ionisation la déperdition de charge que subit un conducteur isolé quand il est exposé à l'air (Coulomb), et il avait attiré l'attention sur l'importance du rôle que pouvaient jouer les ions, par leurs déplacements et leur répartition, sur le champ électrique terrestre et ses variations. Mais en 1899 ces idées reçurent un développement considérable. C. T. R. Wilson, en Angleterre, Elster et Geitel, en Allemagne, les approfondirent et multiplièrent les observations sur l'ionisation de l'air.

Ionisation. — Voici ce que l'étude en laboratoire avait appris sur l'ionisation des gaz et ses agents physiques.

On sait qu'une molécule gazeuse est un agrégat d'atomes, qui eux-mêmes se composent d'une masse principale porteuse d'électricité positive, sinon identique avec elle, et de charges électriques négatives élémentaires, ou électrons. Sitôt que pour une cause ou pour une autre (par exemple par choc ou sous un rayonnement intense) un électron se détache de la molécule, celle-ci reste chargée d'un surplus positif égal à la charge négative qui constitue l'électron. Si la vitesse de l'électron est assez considérable, il sera capable de détacher à son tour par choc sur les molécules du gaz d'autres électrons, et d'ioniser davantage la masse gazeuse, jusqu'à ce que, par suite de ces chocs, sa vitesse soit tombée en dessous de la force vive nécessaire pour produire cet effet. Si la vitesse de l'électron libre n'est pas trop considérable, il ne tarde pas à attirer par action électrostatique des molécules neutres, dont l'ensemble groupé autour de lui forme un ion négatif. De même, le reste positif de la molécule qu'il a quittée attire des molécules neutres ; ensemble ils forment un ion positif de masse plus considérable.

On admet généralement que chaque ion ne porte qu'une charge élémentaire, et que leurs différences de mobilité sont dues à des différences de masse et de viscosité. Les négatifs sont généralement plus mobiles. Les ions diffusent dans la masse des molécules neutres d'après les mêmes lois que les gaz qui se mélangent ; mais ils ne constituent jamais qu'une infime partie de la masse, au plus le dix-milliardième. Ils ont la propriété de pouvoir servir de germes de condensation à la vapeur d'eau, comme les fines poussières de l'air, sur lesquelles la vapeur se condense en gouttelettes de brouillard. Cette condensation s'opère plus aisément sur les ions négatifs que sur les positifs, comme C. T. R. Wilson l'a démontré dans ses remarquables expériences sur l'air débarrassé des poussières, ionisé, et sursaturé de vapeur d'eau. Lorsque par une détente brusque on porte le volume de cet air à 1,25 de sa valeur primitive, le brouillard se forme sur les ions négatifs ; pour des détentes brusques de plus en plus fortes, ce brouillard ne s'épaissit pas d'abord, mais quand la détente atteint 1,31 l'augmentation subite du brouillard démontre qu'à leur tour les ions positifs servent de germes de condensation. On a d'ailleurs découvert des ions gazeux d'une mobilité beaucoup moins considérable que ceux sur lesquels expérimentait Wilson, environ deux mille fois plus lents, donc beaucoup plus massifs, semble-t-il, de l'ordre d'un million de molécules, et dont le diamètre serait de l'ordre du centième de micron. Ces derniers condensent la vapeur d'eau à peine sursaturée et même simplement saturante.

Les ions de signe contraire s'attirent évidemment entre eux, et peuvent en s'entrechoquant neutraliser leurs charges. Si toute cause d'ionisation cessait d'agir dans la masse, celle-ci reviendrait rapidement à l'état non-ionisé. La cause agit-elle toujours avec la même intensité, il devra s'établir un équilibre de régime entre le nombre d'ions nouvellement formés dans l'unité de

temps et celui des ions disparus, soit par recombinaison entre eux, soit par diffusion, soit par entraînement électrostatique, par exemple dans un champ électrique.

Causes d'ionisation. — Les causes d'ionisation des gaz sont nombreuses ; disons quelques mots des principales qui peuvent agir dans l'atmosphère. La plus importante, du moins à proximité du sol, semble être les substances et émanations *radioactives*, qui ionisent l'air par leur rayonnement corpusculaire positif alpha, ou négatif bêta, ou par leur rayonnement ondulatoire gamma. Le rôle important des radioéléments dans l'électricité terrestre et atmosphérique sera exposé en détail plus loin.

Les premiers phénomènes d'ionisation des gaz ont été découverts par la *décharge électrique*. L'étincelle est une cause d'ionisation ; donc aussi l'éclair. Dans les gaz raréfiés, le courant électrique s'établit par ionisation. Quand le vide est plus avancé, le flux sortant de la cathode est constitué par des électrons libres. Ceux-ci, au sortir de l'ampoule, ont encore assez de force vive pour ioniser les molécules de l'air environnant. Même les rayons canaux positifs, qu'on peut recueillir en arrière de la cathode, ont ce pouvoir, mais beaucoup plus restreint.

Très tôt on a reconnu l'ionisation des gaz dans les *flammes* et dans les produits de la combustion à température élevée. On a découvert depuis l'émission d'électrons par les corps simplement incandescents.

Les *rayons* X, que le choc des électrons cathodiques fait surgir de l'anticathode, sont un puissant facteur d'ionisation, soit directement dans les milieux gazeux qu'ils traversent, soit par l'arrachement d'électrons, ou l'émission de rayons secondaires ondulatoires à partir des substances solides qu'ils frappent.

Il existe un *rayonnement* ionisateur *très pénétrant*, de fréquence encore supérieure au rayonnement gamma des

radioéléments, et dont la source n'est pas encore bien connue. L'étude en sera rapportée plus loin.

Même aux fréquences moins élevées que les rayons X, celles qui correspondent à la région ultra-violette du spectre, voire même à sa partie lumineuse, le rayonnement électromagnétique est capable d'ioniser. En effet, un corps chargé d'électricité négative se décharge, en émettant des électrons, quand il est exposé à la *lumière ultra-violette*. Ce pouvoir *photo-électrique* diffère considérablement d'une substance à l'autre ; il est particulièrement élevé pour les métaux, et surtout quand la surface en est fraîchement polie. Les métaux alcalins sont les plus sensibles, ils le sont déjà à la lumière ordinaire, voire à l'infra-rouge ; l'aluminium, le zinc aussi sont sensibles ; le nickel, le fer beaucoup moins. Certains oxydes et la glace sont photo-électriques ; de même la plupart des roches et des terrains, mais dans un degré beaucoup moindre. L'eau ne semble l'être qu'excessivement peu, et en raison d'impuretés situées à sa surface. Étant donnée l'absorption des rayons ultra-violets dans les couches supérieures de l'atmosphère, l'action photo-électrique n'est sans doute efficace qu'aux limites extérieures ; mais elle doit se produire sur les aiguilles de glace qui constituent les nuages très élevés, ou cirrus, et peut-être aussi sur des particules solides en suspension à des hauteurs encore plus considérables. Toutefois, la charge positive qui tend à s'établir sur un conducteur neutre par cette émission d'électrons reste toujours faible, et correspond à 1 ou 2 volts. Lenard a pu établir un effet photo-électrique, même sur des molécules gazeuses, mais uniquement par rayonnement ultra-violet de très haute fréquence (longueur d'onde entre un dixième et deux dixièmes de micron).

Il existe également des cas d'ionisation par *action superficielle*. Ainsi, près des cascades, l'air est chargé négativement, et l'eau positivement ; de même l'air qui a traversé

de l'eau pure en barbotant est chargé d'ions négatifs de faible mobilité, et l'eau reste chargée en signe contraire. Toutefois, si l'eau n'est pas pure, et suivant la nature et la teneur des substances en suspension ou en solution, le phénomène peut décroître en intensité, cesser entièrement, ou se produire en sens contraire. C'est ainsi que le barbotage dans l'eau de mer charge l'air positivement et l'eau négativement. On observe des ionisations analogues dans le rejaillissement et la pulvérisation des liquides. La brusque variation des surfaces de séparation du liquide et du milieu entraîne la production d'électricité. C'est ainsi qu'on explique, par le déferlage des vagues, la formation d'ions positifs au-dessus de la mer, de même que les charges de l'air sous le frottement de la pluie et les chocs fréquents des gouttes.

Déperdition. — Coulomb avait observé que la déperdition de charge d'un conducteur isolé exposé à l'air libre était à chaque instant proportionnelle à la charge du conducteur. On peut appeler *coefficient de déperdition* la fraction constante de la charge perdue à un moment quelconque dans l'unité de temps ; on l'exprime ordinairement en centièmes de la charge moyenne perdus dans une minute.

Cette loi de déperdition de Coulomb n'est rigoureuse que lorsque l'état d'ionisation de l'air ambiant reste constant ; et la mesure du coefficient de déperdition suppose des expériences de courte durée et des variations de charge limitées.

Pour déterminer le coefficient de déperdition à l'air libre, Elster et Geitel conçurent un appareil assez simple, mais dont les indications sont sujettes à caution. La méthode consiste à observer, à l'aide d'un électromètre à feuilles (plus tard on adopta l'électromètre bifilaire Wulf, plus sensible), le temps nécessaire pour que le potentiel d'un collecteur (cylindre de laiton ou de zinc

noirci, haut de 10 cm et de 5 cm de diamètre) diminue d'un certain nombre de volts.

Le champ terrestre modifie l'afflux des ions ; pour annuler cette action perturbatrice, le conducteur cylindrique était entouré d'un manchon de même métal, également noirci, mesurant 14 cm de haut, 18 cm de diamètre. Le manchon est mis en communication avec le sol, comme la cage de l'électromètre.

On reconnaît aisément que la présence du manchon, limitant l'espace libre aux ions qui doivent décharger le collecteur central, entraîne une forte diminution de la déperdition. De plus, le collecteur entouré d'une enveloppe au potentiel zéro n'est pas simplement exposé à l'air libre, hors du voisinage d'autres conducteurs. Schering (1904) a montré que dans ces conditions la déperdition est théoriquement constante, plutôt que proportionnelle au potentiel.

On a d'ailleurs constaté que le coefficient de perte observé à l'aide de cet appareil n'est pas constant et qu'en général il augmente lorsque le potentiel diminue. M. Chauveau a reconnu, en comparant, dans un espace suffisamment abrité contre le champ terrestre, les résultats obtenus avec le collecteur non entouré du manchon et avec le collecteur muni du manchon, que le coefficient de déperdition variait même quand l'air était calme, notamment d'après l'état hygrométrique. Le rapport variait de 3 à 6, pour des endroits bien aérés ; à l'intérieur d'un vaste grenier bien sec, il dépassait souvent 10, et atteignit même 17. A l'observatoire de Tortosa, la valeur moyenne du coefficient mesuré avec manchon était 1,9. Depuis que l'observation s'y fait sans manchon, sous abri, la valeur moyenne est 8,1.

Il faut donc se garder d'attribuer aux indications recueillies avec l'appareil d'Elster et Geitel une autre importance que celle de renseignements qualitatifs, sur l'état d'ionisation et sur ses variations. Vu le grand

nombre des observations faites, certaines données générales peuvent néanmoins s'en déduire, qui paraissent suffisamment contrôlées.

Le coefficient moyen de déperdition est très variable suivant les localités, de 0,5 à 6 centièmes environ par minute. On ne semble pas avoir pu reconnaître l'influence de l'altitude, ni de la position géographique. La première existe pourtant, puisque la conductibilité croît avec l'altitude, ainsi qu'on verra plus loin.

La déperdition de l'électricité négative est généralement plus forte que la déperdition positive, mais le rapport des deux varie d'un endroit à l'autre, entre 1,05 et 1,60. M. Chauveau trouva au dernier étage de la Tour Eiffel le coefficient de déperdition négative égal à 0,4. Leur rapport valait donc environ 3. L'explication la plus plausible de cette différence est que les ions positifs s'accumulent à cause du champ terrestre. Là où ce champ est plus intense, par exemple par la configuration du terrain, les ions positifs, plus nombreux, entraîneront une plus grande déperdition de charges négatives.

La déperdition subit des variations continuelles, comme l'intensité du champ ; ces variations sont dues sans doute au déplacement de masses ionisées et à l'influence de facteurs météorologiques changeants. Outre ces variations plus ou moins brusques et passagères, on a pu en reconnaître de régulières.

Il y a certainement une variation annuelle ; la déperdition admet un minimum en hiver et un maximum en été, dont l'époque est mal définie, mais l'amplitude bien marquée, le rapport des valeurs extrêmes dépassant parfois 2. Cette variation annuelle de la déperdition est en sens contraire de celle du champ électrique.

De même, on croit reconnaître une variation régulière diurne, encore moins bien définie. Il y aurait une oscillation double, dont le maximum principal aurait lieu l'après-midi, coïncidant avec le minimum de champ

électrique mesuré près du sol aux heures les plus chaudes de la journée.

Pour la dépendance des facteurs météorologiques, on a constaté (Simpson) un accroissement des déperditions des deux signes avec la température, leur rapport restant constant. La déperdition augmente aussi avec le vent ; mais la positive tendrait à se rapprocher de la négative, qui serait moins influencée. A température et vent constants, la déperdition est moindre par brouillard ; mais à part ce fait, l'influence du degré d'humidité de l'air n'a pu encore être établie de manière certaine.

Elster et Geitel ont reconnu, et plus tard Simpson (à Karasjok 70° N.) et Chree (à Kew) ont confirmé, que la déperdition est d'autant plus forte que l'air est plus transparent. Cette dernière loi semble être de toutes la mieux établie.

Les variations accidentelles sont l'effet des conditions météorologiques locales, qui régissent le nombre et la mobilité des ions. Nous aurons à en reparler.

L'appareil d'Elster et Geitel fournit donc, sinon des mesures rigoureuses, au moins des indications intéressantes sur l'ionisation de l'air. En effet, d'une déperdition plus forte, on est en droit de conclure à un nombre plus considérable d'ions de signe contraire, en supposant toutefois qu'ils gardent la même mobilité moyenne.

Compteurs d'ions. — On conçoit qu'on n'ait pas pu se borner à ces renseignements et qu'on ait essayé de les préciser. L'idéal ne serait-il pas de compter les ions présents dans l'air, d'observer leur mobilité moyenne et de se rendre compte de leur nature ? On y parvint ; mais par des mesures très délicates, dont la technique assez complexe ne s'est pas encore assez généralisée. Nous allons en exposer brièvement les principes et les résultats présents.

Si l'on crée dans l'air un champ électrostatique, par

exemple à l'aide d'un condensateur cylindrique, les ions suivront les lignes de force du champ ou les remonteront. Si le champ n'est pas trop intense, par exemple inférieur à 300 volts par cm, ils se déplaceront avec une vitesse proportionnelle à leur charge et à l'intensité du champ. On appelle mobilité d'un ion, le coefficient de cette proportionnalité, soit au concret l'espace que l'ion parcourrait en une seconde dans un champ de 1 volt par cm.

Si la masse d'air ne se renouvelle pas et qu'il ne s'y forme pas de nouveaux ions, tous auront finalement été extraits, et les armatures du condensateur seront déchargées d'autant. Il suffira de mesurer la perte de charge du condensateur, et de la diviser par la charge électrique élémentaire pour trouver le nombre de fois que celle-ci y aura été neutralisée par un ion de signe contraire ; on pourra donc compter les ions, leur mobilité moyenne pourrait, en principe, se déduire du temps nécessaire à la neutralisation de tous les ions sur les parois; ce temps est celui même pendant lequel se décharge le condensateur. On fait des mesures séparément pour les ions positifs et pour les négatifs, en maintenant au sol une des armatures, et l'autre à un potentiel de signe contraire.

En réalité, au lieu d'opérer sur de l'air immobile, Ebert et les autres qui après lui s'inspirèrent de la méthode, ont employé un condensateur cylindrique entre les armatures duquel l'air s'écoulait sans cesse renouvelé par un ventilateur de débit connu. La perte de charge du condensateur dépend évidemment des dimensions des armatures, longueur, différence des rayons, du potentiel initial du champ radial, de la vitesse du courant d'air. On peut choisir tous ces éléments de manière que tous les ions de mobilité supérieure à une limite déterminée se déchargent nécessairement au passage dans l'appareil. On pourra donc mesurer le nombre de ces ions par unité de volume, en d'autres termes la densité ionique de

l'air pour un certain signe. La densité pour les ions de l'autre signe s'observera en chargeant en sens inverse l'armature qui n'est pas au sol.

Langevin et Moulin ont démontré qu'à côté des ions dont la mobilité moyenne est de 1,5 cm environ par volt/cm, existent d'autres ions beaucoup plus lents dont la mobilité moyenne est deux mille fois moindre. Les premiers sont constitués par une seule molécule ou un petit nombre de molécules, on les appelle petits ions ; les seconds auraient une masse de l'ordre d'un million de molécules, un diamètre de l'ordre du centième de micron ; on les appelle gros ions.

Les dimensions pratiques d'un appareil destiné à mesurer la densité en petits ions sont les suivantes : tube extérieur du condensateur 30 cm de long, 5 cm de diam. ; armature intérieure, 20 cm de long, 1,8 cm de diam. ; débit d'air, 1,4 à 1,2 litre par seconde ; potentiel, 8 à 10 volts. Dans ces conditions les gros ions qu'on est obligé de recueillir en même temps que les petits sont négligeables.

Pour mesurer la densité totale des ions, petits et gros, Langevin et Moulin fixèrent les dimensions suivantes : tube extérieur, 130 cm de long, 7 cm de diam. ; électrode axiale, 120 cm de long, 5 cm de diam. ; débit d'air, 0,28 à 0,24 litre par seconde ; potentiel, 350 volts environ.

L'appareil a été conçu de manière à permettre l'enregistrement continu de la densité ionique, vu que cette grandeur subit des variations fréquentes et brusques. Toutes les six ou sept minutes, le condensateur est remis automatiquement au zéro, puis chargé à un potentiel de signe différent ; la diminution par décharge continue des ions est enregistrée photographiquement.

Cet appareil peut donc fournir des renseignements quantitatifs complets sur l'ionisation de l'air. C'est ainsi qu'on trouva qu'à Paris la teneur de l'atmosphère en petits ions était en moyenne de 200 de chaque signe

par cc, tandis qu'il y avait 50 fois plus de paires de gros ions. L'usage de cet appareil ne s'est pas établi dans les observatoires, sans doute en raison de sa complexité.

L'appareil d'Ebert (1901) était commode. Les dimensions plus restreintes en étaient calculées pour mesurer tous les ions de mobilité supérieure à 1,4 cm, mobilité moyenne des ions produits dans l'air sous la pression atmosphérique par les rayons X. Plus tard on reconnut qu'il existait normalement des ions de mobilité moindre et qu'il y avait avantage à abaisser la limite inférieure de mobilité des ions captés nécessairement par l'appareil. Pendant longtemps on crut qu'il n'existait guère, au moins à l'état stable, d'ions intermédiaires, dont la mobilité fût comprise entre 0,20 cm et celle des gros ions de Langevin. Ceux-ci sont trop lents pour entrer en ligne de compte dans la décharge du collecteur d'Ebert. Mais la question longtemps controversée de l'existence d'ions moyens semble bien devoir être résolue par l'affirmative. Mc Clelland trouva en effet dans les flammes, de gaz, et Aselmann à proximité de chutes d'eau, des ions de mobilités très diverses, s'abaissant jusqu'à 0,003 cm/sec. Pollock découvrit dans l'air de Sydney des ions intermédiaires dont la mobilité variait entre 0,06 et 0,002 cm/sec. Il est vrai qu'à Dublin, Mc Clelland et Kennedy ne purent en trouver de semblables et combattirent les conclusions de Pollock.

Gockel voulut résoudre le problème. Il employa à cet effet une méthode déjà indiquée par Langevin, et que nous allons expliquer. Supposons un appareil d'Ebert de dimensions suffisantes pour qu'y soient captés tous les ions de mobilité supérieure à 0,2 cm par exemple. Au lieu d'y appliquer d'emblée la différence de potentiel nécessaire pour neutraliser tous les ions du courant d'air, appliquons-y des différences de potentiel de valeur croissante et notons l'intensité de perte de charge correspondant à chacune de ces valeurs du champ. Cette intensité

du courant de décharge par les ions ira évidemment en croissant avec les différences de potentiel employées ; mais, s'il n'y a pas d'ions de mobilité moindre que 0,2 cm, l'intensité de la décharge cessera de croître quand la différence de potentiel employée suffira pour neutraliser tous les ions qui se déplacent de 0,2 cm au moins par seconde dans un champ de 1 volt par cm. A partir de cette différence de potentiel le courant obtenu se composera de tous les ions présents, ce sera, comme on dit, un courant de saturation. Mais si l'air contient des ions encore plus lents, les différences de potentiel appliquées toujours plus fortes, détermineront des courants de décharge toujours plus intenses. Toutefois, si la courbe ascendante du courant présente des pointes, on sera fondé à conclure qu'il existe parmi les ions des catégories de mobilités différentes, chacun des points de la courbe manifestant la différence de potentiel qui suffit tout juste à neutraliser tous les ions de telle ou telle mobilité. La méthode est d'application délicate quand il s'agit d'étudier les ions de l'air atmosphérique. En effet leur densité n'est pas constante, mais soumise à des variations importantes et parfois très brusques ; le courant de décharge devant être observé pendant plusieurs minutes au moins, on n'est pas certain d'interpréter correctement les pointes de la courbe du courant de décharge. Toutefois, il semble bien que Gockel ait établi définitivement l'existence d'ions intermédiaires entre les petits ions et les gros ions de Langevin, au moins dans certaines localités de la Suisse, où l'atmosphère était assez dépourvue de poussières et de fumée.

Ces résultats remettent en question ceux qu'on déduit des observations faites avec les appareils du type d'Ebert. En effet, tant qu'on put croire à l'existence dans l'air de deux classes seulement d'ions stables, les petits, de mobilité supérieure à 0,2 cm et les gros, de mobilité 2000 fois moindre, on pouvait négliger le rôle de ces

derniers. Mais les ions de mobilité moyenne ajoutent leur action à celle des petits ions suivant une loi complexe, et on n'est plus en droit d'en faire abstraction pour dénombrer les ions de l'air.

Conductibilité. — La conductibilité de l'atmosphère à un endroit déterminé dépend à la fois du nombre et de la mobilité des ions qui s'y trouvent, car les plus mobiles se succèdent plus rapidement et traversent donc en plus grand nombre l'unité de surface perpendiculaire aux lignes de force du champ. Effet résultant, la conductibilité est plus aisément mesurable que chacun de ses deux facteurs, la mobilité et le nombre des ions. Il suffit en effet de mesurer l'intensité moyenne du courant qui s'établit dans un champ uniforme, par exemple entre les deux armatures d'un condensateur plan ou cylindrique sous une différence de potentiel connue. La conductibilité est égale, d'après la loi d'Ohm, au quotient de l'intensité du courant par la différence de potentiel. En pratique, il faut éviter que la distribution des ions dans la masse observée ne soit modifiée par la présence du condensateur, c'est-à-dire qu'il ne faut pas le charger trop fortement, pour que les ions de tel signe ne puissent pas s'accumuler en telle région du champ. L'intensité du courant se déduit de la charge que perd le condensateur en un temps bien défini. L'uniformité du champ est assurée autant que possible par le renouvellement continuel de la masse d'air soumise à l'observation. Dans le courant total, les ions positifs et les ions négatifs agissent tous ; mais il y a moyen de déterminer leurs rôles respectifs, tout comme pour la mesure des déperditions positive et négative, en maintenant l'une des armatures au sol et en chargeant l'autre tantôt négativement tantôt positivement. Dans le premier cas, on mesurera la conductibilité due aux ions positifs ; dans le second, celle due aux ions négatifs.

La conductibilité totale est la somme de ces deux conductibilités partielles.

Un appareil assez universellement connu pour ces observations est celui de Gerdien. Il ne se distingue guère de celui d'Ebert que par les caractéristiques du condensateur cylindrique. L'électrode intérieure est longue d'une vingtaine de cm, et son diamètre est de 1,5 cm, le cylindre extérieur a 16 cm. de diamètre en sa partie moyenne ; il s'évase aux deux bouts en tronc de cône, du côté de l'admission de l'air et du côté de l'aspirateur, sa longueur totale est 60 cm environ. La différence de potentiel appliquée est moindre que pour l'Ebert, 140 à 200 volts ; elle se mesure à l'électromètre bifilaire ou unifilaire. Le débit de l'aspirateur est plus considérable ; il peut varier sans compromettre la précision des mesures. On se sert d'un ventilateur à hélice mû à la main ou électriquement. Le temps nécessaire pour une mesure de la conductibilité est de 3 à 4 minutes environ.

Toutefois il faut apporter aux résultats mêmes de cet appareil certaines corrections. La première est due à l'imperfection de l'isolement. Elle se déduit de la fuite de charge du condensateur lorsque, l'aspirateur étant arrêté, les ions ne se renouvellent pas dans l'appareil. La seconde correction est due au dépôt de substances radioactives sur les parois négatives ; on la réduit en essuyant préalablement ces parois et en tenant compte de la teneur en radioéléments de l'air étudié. Une troisième cause d'erreur résulterait de la présence de conducteurs, chargés ou neutres, qui par influence électrostatique modifieraient la distribution normale des ions dans l'air. Swann a remarqué en outre qu'il faudrait supprimer, par un écran conducteur cylindrique, l'attraction que l'électrode chargée exerce sur les ions de signe contraire en dehors même de l'appareil ; sans cette précaution, l'air aspiré dans l'appareil contiendra un surplus de ces ions. Le même auteur a installé à l'Institution Carnegie de

Washington un appareil semblable avec enregistrement photographique.

L'étude de la conductibilité fournit des résultats qui confirment et précisent les lois de la déperdition rapportées plus haut. Nous allons indiquer la *moyenne approximative* calculée par Bauer et Swann, 1° sur l'ensemble des observations faites dans les principales stations, 2° dans la croisière (1914-1915) du *Carnegie*, pour la conductibilité par les ions positifs, l, et, les ions négatifs l', en dix-millièmes U E S, et pour le nombre des ions par centimètre cube, positifs, n, négatifs, n'.

	l	l'	l/l'	n	n'	n/n'
Sur terre	1,30	1,23	1,06	737	668	1,23
Sur mer	1,44	1,19	1,21	804	677	1,22

La conductibilité par les ions positifs est nettement supérieure à celle qui est due aux ions négatifs. Le nombre des premiers, plus élevé que celui des seconds, compense et au delà leur différence de mobilité. Cette différence est d'ailleurs moins grande entre les petits ions atmosphériques qu'entre les ions produits en laboratoire. Sur terre, les petits ions positifs parcourent en moyenne 1,08 cm par seconde dans un champ de 1 v/m, tandis que les négatifs en parcourent 1,22, soit 0,88 de rapport entre les deux mobilités. Sur mer, ce rapport est encore plus voisin de l'unité, environ 0,94.

L'influence des divers *facteurs météorologiques* n'est pas encore bien éclaircie.

D'une manière générale la conductibilité totale est moindre lorsque l'air est chargé de poussières, de noyaux de condensation, de brume. Cette diminution est due sans doute à ce que les petits ions s'attachent alors aux grains de poussière, aux noyaux et aux gouttelettes de brume ; ils forment ainsi des centres électrisés beaucoup moins

mobiles. L'excédent des ions prositifs près du sol serait dû à leur accumulation dans le champ électrostatique de la Terre.

L'influence de l'état hygrométrique semble s'exercer aussi par un amoindrissement de la conductibilité ; plus cet état est élevé, plus les ions ont de tendance à s'attacher à des particules de condensation ; le nombre des petits ions diminue donc, et celui des gros augmente.

La température paraît avoir une répercussion directe dans la conductibilité. Simpson a observé pour une augmentation de 30° C un accroissement de l'ionisation dans le rapport de 1 à 2,2.

La conductibilité est plus forte en général *en été* qu'en hiver, dans le rapport de 1,5 environ. Sans doute y a-t-il là une influence prépondérante de la température. La teneur en ions est plus grande aussi en été, et l'amplitude de cette variation annuelle a été trouvée égale à 40 % en Argentine. La variation annuelle de la conductibilité est donc inverse de celle du champ électrique terrestre, comme l'indiquait déjà la variation annuelle de la déperdition.

On constate aussi, mais d'une manière plus confuse, une variation diurne de la conductibilité, en général encore inverse de la *variation diurne* du champ. Toutefois, comme le maximum de la conductibilité se trouve aux heures les plus froides du jour, le rôle de la température est ici effacé. D'ailleurs, les circonstances météorologiques, particulièrement celles qui déterminent la formation de gros ions, et aussi la direction et la vitesse du vent, influent grandement sur les mesures et il faudra encore accumuler les observations suivies pour dégager les lois de la variation diurne de la conductibilité. Nous aurons encore à parler plus loin du rôle prépondérant à la surface du sol et des éléments radioactifs. Sur mer, où les influences locales sont moins actives, on a remarqué que la teneur

en ions est plus grande de 10 % environ dans la journée que pendant la nuit.

Quelques observations, trop peu nombreuses pour légitimer des conclusions fermes, amènent à croire que dans les régions polaires la conductibilité de l'air est plus grande qu'aux autres latitudes.

On n'a pas trouvé de variation cyclique de la conductibilité en rapport avec la période undécennale d'activité du Soleil.

Les observations faites à proximité du sol se ressentent fort des influences locales ; elles fournissent parfois des résultats différents dans des appareils distants de quelques dizaines de mètres seulement. Dans les couches inférieures de l'atmosphère, c'est-à-dire au-dessous de 1 000 et 2 000 mètres, la conductibilité et la teneur en ions varient encore beaucoup d'un endroit à l'autre, suivant les conditions météorologiques. Elles y ont en moyenne la même valeur qu'au sol. Plus haut, des explorations par enregistrement, jusqu'à 9 000 m, à bord de ballons libres ou d'avions, ont fait reconnaître une rapide progression. Vers 7 000 ou 8 000 m, la conductibilité atteint 15 ou 20 fois sa valeur au sol. Le nombre des ions et leur mobilité croissent tous deux avec l'altitude. Entre 4 000 et 4 500 m par exemple, Gockel a trouvé environ 3 fois plus d'ions (petits ions) des deux signes qu'à l'altitude de 2 000 m. La mobilité des ions augmente par suite de la diminution de la pression ; à 9 000 m la pression est réduite au tiers et, de ce chef seul, la mobilité peut être triplée, mais elle augmente aussi par suite de la diminution des poussières et des brouillards et, plus haut, de la vapeur d'eau.

Les mesures effectuées dans les montagnes donnent des résultats très variables, mais somme toute analogues aux

précédents (1). L'excédent des ions positifs est plus grand, apparemment à cause du champ électrique. Comme celui-ci est souvent considérable dans les montagnes, la conductibilité plus grande de l'air provoque des phénomènes intenses et irrégulières de décharge.

Au delà de 9 000 m, on ne possède pas d'observation directe de la conductibilité dans la haute atmosphère. Plusieurs raisons, tirées de l'étude du magnétisme terrestre et de la propagation des ondes électro-magnétiques de T S F, amènent à penser que cette conductibilité est très élevée.

III. — LE COURANT VERTICAL

L'air atmosphérique n'est donc pas un isolant parfait. Les ions descendent les lignes de force du champ, ou les remontent, d'après leur signe. Le courant qu'ils forment ainsi s'appelle courant de conduction, comme résultant de la conductibilité de l'air. On le distingue des décharges brusques, telles que l'éclair ; des courants de précipitation, pluie, neige ou grêle qui entraînent des charges ; et des courants de convection, le vent transportant des masses d'air où les ions d'un signe sont plus nombreux que ceux du signe contraire.

L'existence du courant de conduction pose deux grands problèmes : d'où viennent les ions qui le forment ? comment se conserve le champ électrostatique, autrement dit la charge du sol, malgré l'afflux continuel du courant ?

Il nous faudra revenir sur ces questions. Avant de détailler ici quelque peu l'étude du courant vertical,

(1) Les observations de Gockel, par exemple, donnèrent (mêmes unités que pl. 29) :

	l	l'	l/l'	n	n'	n/n'
Fribourg en Suisse, 640 m.	1,30	1,22	1,08	1013	908	1,10
Eggishorn, 2900 m.	4,65	2,99	1,53	1847	1218	1,52

(n et n' calculés en prenant pour la charge électrique élémentaire la valeur trouvée par Millikan : $e = 4{,}77.10^{-10}$).

montrons que son influence est considérable, même en regard des autres courants énumérés plus haut. A supposer l'intensité moyenne du champ et la conductibilité moyenne de l'air, le courant électrique normal (1), dans le sens air-terre, suffirait à décharger la Terre en une dizaine de minutes,si l'électricité négative du sol n'y était sans cesse régénérée. Sans doute les décharges par la foudre sont incomparablement plus intenses ; mais elles ne se font pas toujours dans le même sens, elles sont relativement peu fréquentes et leur répercussion ne semble pas s'étendre bien loin. Les précipitations aqueuses déposent de l'électricité au sol. La charge de la pluie varie entre 0 et 1 ou 2 unités E S par gramme ; elle peut atteindre, par extraordinaire, quelques dizaines d'unités. Le débit d'électricité par cm carré dans le cas extrême d'une forte pluie d'orage donnant une hauteur d'eau d'un mm par minute, en supposant la charge par cc égale à l'unité E S, est environ 1700.10^{-6} U E S, soit mille fois l'intensité moyenne du courant de conduction. On a cru pendant quelque temps que les charges négatives y étaient en excès ; mais des observations plus récentes ont démontré que la pluie est plus souvent positive que négative. M. A. Baldit, par exemple, a trouvé pour ce rapport de fréquence la valeur 1,53.

Dans certains cas, le courant de convection pourrait masquer le courant de conduction. Par exemple, si l'air contenait un excès de 100 ions positifs par cc., la densité de cette charge libre serait $4,77.10^{-8}$ U E S ; un vent de 1 m par sec. constituerait un débit de $4,77.10^{-6}$, soit environ 4 fois le courant vertical moyen de conduction. Près du sol, il existe parfois des courants d'air verticaux dont la vitesse dépasse 1 m/s ; mais dans les

(1) 1,5 /300 unités E S de gradient par cm $\times$ $2,53.10^{-4}$ U E S de conductibilité = $1,25.10^{-6}$ U E S d'intensité de courant ou 4.10^{-16} ampère par cm^2.

altitudes élevées, surtout au delà de 6 000 m, où la vitesse moyenne du vent est plus grande, les effets de la convection semblent devoir être plus intenses.

La méthode la plus sûre pour observer l'intensité du courant vertical au sol, est la mesure directe absolue de la charge totale qui se dépose pendant un intervalle de temps connu sur une surface conductrice isolée horizontale au voisinage du sol. Ebert appliqua le premier cette méthode ; mais il obtint des résultats trop petits, parce que son plan d'épreuve prenait un potentiel différent de celui du sol au fur et à mesure que venaient s'y déposer les charges ; au-dessus, le champ électrostatique diminuait donc d'autant et par conséquent aussi l'intensité du courant ionique.

C. T. R. Wilson et Simpson corrigèrent cette source d'erreur en maintenant au potentiel du sol le conducteur isolé. Simpson employa un cadre de 17 m carrés portant un treillis couvert de papier rendu conducteur par une couche de plombagine. Le cadre placé horizontalement à 15 cm au-dessus du sol, communiquait avec un collecteur à écoulement d'eau, également isolé, dont le jet se divisait à l'intérieur d'un anneau conducteur communiquant directement avec le sol. D'après le principe de la prise de potentiel en un point de l'air, indiqué plus haut, la plaque évacuait par les gouttelettes les charges qu'elle recevait et qui auraient modifié son potentiel par rapport au sol. Ces charges, on les mesurait à l'électromètre Benndorff, en recueillant l'eau dans un récipient isolé ; de deux en deux minutes, un dispositif enregistreur en inscrivait la valeur. Un second électromètre enregistrait simultanément la valeur du champ au voisinage du sol ; car les fluctuations du champ déterminent aussi par influence un dégagement de charges par la plaque conductrice. L'intensité du champ étant connue, on pouvait déterminer, dans la charge totale du liquide

écoulé, la part amenée par la conduction. Simpson ne procéda ainsi à la mesure directe du courant vertical que pendant quelques mois, à Simla (Indes anglaises) ; il trouva une intensité positive moyenne de $5{,}4.10^{-7}$ U E S, soit $1{,}8.10^{-16}$ ampères par cm carré.

L'appareil de C. T. R. Wilson est basé sur le même principe, mais de dimensions plus restreintes et même aisément transportable. On s'en sert régulièrement à Kew. La plaque conductrice isolée est ici réduite à un disque de 7 cm de diamètre, en laiton noirci, entouré dans le même plan d'un anneau de garde concentrique mis au sol. Elle communique d'une part avec un électromètre à feuilles d'or et d'autre part avec un condensateur réglable. Le déplacement de l'armature mobile de celui-ci, maintenue à un potentiel constant, permet de rétablir au fur et à mesure le potentiel de la plaque. La capacité variable peut être facilement étalonnée ; la charge déposée par l'air sur la plaque se déduit donc de la position de l'armature mobile (1). Ou bien, si l'on ramène le compensateur à sa position initiale, la déviation nouvelle de l'électroscope permet d'évaluer cette charge par l'élévation de potentiel correspondante. Le plateau d'épreuve se trouvant à 70 cm du sol, pour connaître le courant de conduction au ras même du sol, dans les conditions normales, il faut réduire d'après des expériences de comparaison les indications de l'appareil.

Le courant vertical n'a guère été mesuré par la méthode directe. On a surtout employé une méthode indirecte ; en déterminant au même moment le gradient du poten-

(1) C. T. E. Wilson a construit un nouvel appareil où le condensateur réglable à la main est remplacé par un condensateur-électromètre capillaire, dont les armatures mobiles, index de mercure séparés par une solution alcoolique d'acide sulfurique, maintiennent automatiquement au potentiel constant le plateau d'épreuve. Cet appareil se prête à l'enregistrement photographique continu du courant vertical.

tiel et la conductibilité de l'air près du sol. Le produit de ces deux grandeurs est égal en effet à l'intensité du courant.

Les agents météorologiques locaux, qui influent sur l'un ou l'autre de ces facteurs, et particulièrement sur le gradient du potentiel, entraînent des variations accidentelles du courant de convection, dont on ne parlera pas ici. Voici les intensités moyennes trouvées, en 10^{-16} ampère par cm carré.

Mesures directes.

Simpson (à Simla, dix journées 1909),	1,8
C. T. R. Wilson (près d'Edimbourg, une année, 1907),	2,22
Lutz (à Munich), 1909	1,02

Mesures indirectes.

Gerdien (à Gœttingue, du 1 au 17 avril 1906)	2,4
Angenheister (à Samoa, une année, 1907-08)	2,14
Kähler (à Potsdam, oct. 1910 à sept. 1911)	2,4
Dorno (à Davos, 1560 m. une année, 1910)	1,7
Berndt (à Buenos-Ayres, 1911)	1,3
Gockel (à Fribourg, 1913-1915)	3,0
Salles et Gibault (au Val-Joyeux, mars-août 1913)	2,17
Wegener (au Groenland, 1906-1908)	4,3
Rouch (à l'île Petermann, antarctique, 9 mois 1908-1909)	7,5
Ansel (en Islande, 1910)	3,0
A bord du *Carnegie* (dans le Pacifique, 1915-1916)	3,13
» » (dans l'océan antarctique)	3,3
Angenheister (dans les océans Indien et Pacifique)	2,1

Sur le continent, en dehors des régions polaires, la moyenne des valeurs ci-dessus est $2{,}2.10^{-16}$ amp/cmc. Dans les contrées polaires, le courant est nettement plus intense; il semble l'être aussi un peu plus sur mer que sur les continents (1).

(1) Le courant vertical mesuré par ces méthodes électriques est environ dix mille fois moins intense que celui que l'on déduit des observations magnétiques. En additionnant, plus rigoureusement en intégrant, le long de vastes contours fermés sur des cartes magnétiques la composante de la force magnétique terrestre dirigée suivant chacun

Le fait le plus remarquable que les observations faites jusqu'à ce jour établissent suffisamment, est le caractère relativement *constant et uniforme* du courant vertical. Une augmentation du champ est ordinairement accompagnée d'une diminution de la conductibilité, si bien que, malgré les variations considérables à un même endroit de chacun de ces deux facteurs, le courant de conduction ne subit que des fluctuations bien moindres ; de même, en deux endroits les courants diffèrent bien moins que par exemple le gradient. Tandis que le champ varie de 1 à 9, et la conductibilité de 6 à 1, le courant oscille entre 1 et 1,6.

Les observations d'Angenheister à Samoa constituent la seule exception à cette loi. En saison sèche (juin à août) il trouva le champ maximum, 56,4 v/m, et aussi la conductibilité la plus grande, $5{,}31.10^{-4}$ E S. En saison des pluies (novembre à mars), il trouva 20,9 v/m et $4{,}11.10^{-4}$ E S. Le courant vertical était donc pendant la saison sèche de $4{,}4.10^{-16}$ amp/cmc, et pendant la saison des pluies de $1{,}3.10^{-16}$. Chose curieuse, la moyenne annuelle, $2{,}2.10^{-16}$, est égale à la moyenne générale ci-dessus.

Kähler, à Potsdam, et Gockel, à Fribourg, ont cru observer une variation annuelle du courant ; il serait légèrement plus faible en été qu'en hiver. Mauchly, à bord du *Carnegie*, pense avoir reconnu une variation diurne :

des éléments du contour, on détermine l'« intégrale de circulation du champ magnétique ». Cette intégrale valant 4π fois l'intensité totale du courant vertical qui traverse la surface limitée par le contour, on peut calculer l'intensité moyenne par km carré par exemple. Le résultat ainsi obtenu serait du même ordre de grandeur, 1/30 amp par km carré, dans beaucoup de régions ; mais le sens ne serait pas le même partout. L'électricité positive traverserait la surface de haut en bas dans certaines contrées ; dans d'autres, surtout semble-t-il vers les latitudes moyennes, elle passerait de bas en haut. Il y a là des questions à élucider, notamment la délimitation des aires à courant ascendant, de sens contraire au courant vertical mesuré électriquement, et l'énorme disproportion entre les résultats des observations électriques et magnétiques.

le maximum et le minimum de cette onde de 24 heures se produiraient simultanément à toutes les longitudes. Mais il faudra accumuler encore les observations régulières et démêler l'influence des conditions météorologiques locales, pour déterminer les lois de variation du courant de conduction au sol.

L'étude des *variations* du courant *avec l'altitude* est importante au point de vue de l'explication de ce courant et du champ terrestre ; on conçoit que cette étude, en raison des difficultés spéciales qu'elle présente, ne soit pas fort avancée. Pourtant on y a déjà fait des constatations intéressantes. Wigand, en combinant des relevés du gradient et de la conductibilité, pris à diverses altitudes jusqu'à 9 km, en ballon ou en avion, reconnut que si le gradient diminue et la conductibilité augmente avec la hauteur, le gradient diminue plus vite que la conductibilité n'augmente. Ainsi, comme résultat moyen de plusieurs ascensions, il établit que tandis qu'au sol, à Potsdam, le courant était de 2,3 à 3.10^{-16} amp/cmc, entre 3 et 4 km. de hauteur il n'était plus que $1,3.10^{-16}$, et entre 6 et 9 km, $0,73.10^{-16}$ amp/cmc seulement.

Dans les couches très raréfiées de la haute atmosphère, à quelque 60 km, on est amené d'après certaines théories à admettre une conductibilité très grande et des courants intenses, mais développer ce sujet serait quitter le point de vue expérimental où nous nous sommes placé dans cette première partie de l'exposé.

N° 39.

Revue annuelle d'Astronomie
1925

par M. M. Alliaume (1)

Sommaire (*).

Coopération internationale. — Le congrès de Cambridge de l'Union astronomique internationale.

Soleil et planètes. — *Soleil :* rotation ; étude de l'atmosphère ; rayonnement de la couronne (constante solaire) ; protubérances et éruptions, équilibre de la chromosphère. — *Planètes :* parallaxe solaire (nouvelles méthodes de détermination des orbites) ; diamètre de Vénus ; uniformité de la rotation terrestre ; déplacement du périhélie de Mercure ; observations de Mars à son opposition de 1924 ; température et atmosphère de Mars.

Étoiles. — *La masse des étoiles doubles :* (distribution apparente des étoiles et des nébuleuses, distances stellaires) systèmes binaires

(1) Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 10 (1926, 2), p. 149.

(*) *Abréviations bibliographiques.* — R. A. = cette *Revue annuelle d'Astronomie* 1920...1924. — R. Q. S. = Revue des Questions scientifiques (Louvain). — C. R. = Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — M. N. = Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (Londres). — Obs. = The Observatory (Londres). — B. A. A. = Journal of the British Astronomical Association (Londres). — Aph. J. = The Astrophysical Journal (Chicago). — An. J. = The Astronomical Journal (Albany., N. Y. . — P. A. = Popular Astronomy (Northfield, Minn.). — Pac. = Publications of the Astronomical Society of the Pacific (San Francisco). — H. C. O. = Harvard College Observatory, *Circulaires, Bulletins, Annales* (Cambridge, Mass.). — L. O. B. = Lick Observatory Bulletin (Mount-Hamilton, Cal.). — A. N. = Astronomische Nachrichten (Kiel).

visuels, spectroscopiques, photométriques (céphéides). — *Physique stellaire* : (études récentes de physique stellaire) une relation entre la masse et la grandeur absolue, indépendamment de la densité (parallaxe dynamique des étoiles doubles ; les naines blanches de grande densité ; nouvelle confirmation de la Relativité) ; correction de cette relation au moyen de la température.

Cosmogonie stellaire. — *Hypothèse de Lockyer et de Russell :* le diagramme en branches de compas. — *Hypothèse de Jeans :* cheminement sur la surface des masses en fonction de la température et de l'éclat. — *Hypothèse d'Eddington :* étoiles naines et géantes ; perte de masse des étoiles. — *Formation des étoiles doubles :* rupture d'une étoile et variation du type spectral ; figures d'équilibre d'un fluide homogène en rotation uniforme (stabilité de la figure ovoïde) ; phases d'une étoile en voie de se rompre ; explication des variables irrégulières, des variables à longue période, des céphéides, des systèmes binaires spectroscopiques.

Nébuleuses. — *Distances des nébuleuses spirales :* (la Galaxie et les nébuleuses spirales) vitesses radiales ; déplacement solaire par rapport aux nébuleuses spirales (par rapport à diverses classes d'objets célestes ; rayon de courbure de l'univers) ; distance de la nébuleuse d'Andromède (nébuleuses obscures, rotation des nébuleuses). — *Observation de novae dans les nébuleuses spirales* : novae galactiques et novae nébulaires (Nova Pictoris 1925) ; distances des novae nébulaires. — *Observation de céphéides dans les nébuleuses spirales :* (études récentes sur les amas) distance des céphéides d'après leur période.

(*) *Coopération internationale.* — La deuxième assemblée générale de l'Union astronomique internationale s'est tenue à Cambridge du 14 au 22 juillet 1925 sous la présidence

(*) *Notes documentaires et bibliographiques.* — La rédaction de cette Revue d'Astronomie comporte des notes documentaires et bibliographiques nombreuses et étendues. On a pensé qu'on faciliterait la lecture du grand texte en réunissant tontes ces notes à la fin de l'article, plutôt que de les distribuer au bas des pages. Les notes relatives à la partie *Soleil et planètes* (y compris la *Coopération internationale*) sont numérotées de 1 à 19 et se trouvent aux pages 182 à 184 ; à la partie *Etoiles*, numérotées de 20 à 39, aux pages 185 à 190 ; à la *Cosmogonie stellaire*, 40 à 49, aux pages 191 à 193 : et les notes 50 à 71, qui concernent les *Nébuleuses*, se trouvent aux pages 193 à 201 Dans le sommaire ci-dessus, les questions indiquées entre parenthèses sont traitées dans ces notes. Cependant quelques notes, d'un caractère explicatif plus élémentaire, ont été maintenues au bas des pages ; elles sont indiquées par des astérisques.

de W. W. Campbell, directeur de l'Observatoire Lick, en Californie (1).

Les travaux des diverses commissions et les décisions adoptées seront indiqués, lorsque l'occasion s'en présentera, au cours de cette revue. Il y a lieu de signaler ici la suppression de la Commission de la Relativité, cette théorie ne pouvant actuellement rien attendre d'études collectives, — l'adoption d'un système définitif de notations astronomiques (2), — la recommandation, par la Commission de l'Astronomie méridienne, que la variation de la réfraction aux diverses heures du jour et en différentes régions du ciel soit étudiée d'une manière plus complète, — la définition, par la Commission des longueurs d'onde, des circonstances dans lesquelles doit se produire la radiation du cadmium choisie comme étalon primaire des longueurs d'onde, — la création de deux commissions nouvelles, l'une de la statistique stellaire, l'autre de la parallaxe solaire —. La prochaine assemblée aura lieu à Leyde en 1928. Le nouveau bureau de l'Union est constitué de la manière suivante : W. De Sitter, président ; V. Cerulli, H. Deslandres, S. Hirayama, A. Eddington et F. Schlesinger, vice-présidents ; F. Stratton, secrétaire général.

Soleil et planètes

Cette Revue des publications astronomiques de 1925 s'occupera principalement des étoiles et des nébuleuses. Le Soleil et les planètes ont été traités d'une manière assez abondante dans les Revues des années antérieures pour qu'il suffise aujourd'hui de signaler la suite ou le développement des travaux annoncés précédemment.

Soleil. — On sait que la rotation du Soleil n'est pas la même en tous les points de sa surface (3). Elle varie avec la distance à l'équateur solaire. De plus, les observations spectroscopiques viennent de montrer à Evershed que, dans le plan même de cet équateur, la vitesse de rotation dépend du niveau plus ou moins profond de la couche à laquelle appartient le point dont on définit la vitesse angulaire (4). Par exemple, les vapeurs de sodium auxquelles le spectre solaire doit les raies d'absorption notées D ont une

vitesse linéaire de 1,939 km/sec, c'est-à-dire une vitesse angulaire de 13°,7 par jour, tandis que les vapeurs de calcium décelées par les raies H et K du spectre se déplacent à raison de 2,126 km/sec, ou avec une vitesse angulaire de 16°,8.

L'étude de l'atmosphère solaire a été poursuivie en un grand nombre d'observatoires. Citons en particulier l'observatoire de Meudon où se sont réalisés des progrès qui ont été mis en évidence dans l'assemblée de Cambridge (5). L'observatoire de Meudon est jusqu'ici le seul qui enregistre les mouvements radiaux des vapeurs solaires, mouvements dont l'étude est aussi féconde que celle des formes. C'est ainsi qu'ont été découvertes des protubérances à déplacements internes hélicoïdaux particulièrement intéressantes, et d'autant plus qu'elles donnent une mesure du champ magnétique solaire extérieur, à la base de la couronne : ce champ a été trouvé très faible.

Le rayonnement de la couronne solaire a été mesuré au Mount-Wilson pendant l'éclipse du 24 janvier 1925 (6). Ce rayonnement vaut le millionième du rayonnement solaire, à quoi correspondent deux millionièmes de calorie par cm carré et par minute à la distance moyenne de la Terre au Soleil. A l'occasion de la même éclipse, l'étude photométrique de la couronne solaire a encore été faite au cours d'une expédition organisée par plusieurs observatoires américains (7). L'éclipse avait lieu à une époque de minimum d'activité solaire, et il était intéressant de comparer les résultats avec ceux qu'avait fournis l'éclipse du 8 juin 1918, à une époque d'activité maximum. La lumière de la couronne s'est montrée, en 1925, 13 % plus faible qu'en 1918 ; on estime cependant que cette différence peut être absorbée par les erreurs d'observation. En 1918, la clarté du ciel au voisinage du Soleil avait été réduite dans le rapport de 5300 à 1 ; en 1925, le rapport observé à été 5500/1.

Dans une réunion de la Royal Astronomical Society, Mrs Maunder a exposé l'état actuel des recherches solaires (8). Cette conférence a envisagé principalement la possibilité que les protubérances solaires soient le siège d'éruptions dont la matière, repoussée par la pression de radiation, serait définitivement perdue pour le Soleil ; comme les vitesses

observées sont énormes, l'attraction planétaire est insuffisante à retenir ces vapeurs dans des orbites elliptiques, et elles sont perdues même pour le système planétaire. Cette déperdition de la masse solaire n'est pas uniforme dans le temps : elle passe par des maxima aux époques de plus grande activité solaire, et, de plus, autour de cette grande oscillation festonne une oscillation dont la période n'est que de 25,2 jours sidéraux. Cette dernière période se retrouve dans tous les phénomènes solaires, dans les variations du magnétisme terrestre, et dans ceux de l'éclat de Saturne, au point qu'il y aurait là, eu égard au rayonnement matériel du Soleil qui vient d'être décrit, une relation qui serait l'indice d'un rapport de cause à effet. — E. A. Milne a fait, devant la même société, une conférence sur l'équilibre des vapeurs de calcium dans la chromosphère (9). Les recherches présentées dans cette communication concernent la situation dynamique des atomes de calcium ionisés distribués dans l'atmosphère solaire. La théorie prévoit deux cas suivant que les vapeurs considérées, soumises à la pesanteur, sont totalement ou partiellement supportées par la pression de radiation. Le rapprochement des conséquences de cette théorie et de la hauteur observée de l'atmosphère solaire de calcium montre que cette atmosphère doit être considérée comme entièrement supportée par la pression de radiation. Cette hauteur des vapeurs de calcium est estimée à 14000 km. Ceci a provoqué une discussion à laquelle ont pris part plusieurs astrophysiciens, parmi lesquels J. Evershed. Celui-ci considère la hauteur adoptée par Milne comme beaucoup trop grande, et, s'appuyant sur les observations faites pendant les éclipses totales de 1898, 1900 et 1905, trouve une altitude moyenne de seulement 8570 km.

Planètes. — Les astronomes considèrent le demi-grand axe de l'orbite elliptique décrite par la Terre autour du Soleil pour foyer (par rapport à l'ensemble des étoiles) comme l'une des grandeurs fondamentales de leur science. C'est par elle que l'on connaît les éléments correspondants des orbites des autres planètes, et c'est en fonction de cette grandeur, par l'intermédiaire de la parallaxe ou du parsec, que se mesure souvent et s'exprime presque toujours la distance des étoiles. Le lien, précisément, qui unit les grands

axes de toutes les orbites planétaires, par les durées de révolution, permet de déduire le grand axe de l'orbite terrestre de la distance de la Terre à n'importe quelle planète à un instant quelconque. Cette mesure de distance est d'autant plus facile que la planète considérée est plus proche de la Terre. C'est ce qui explique l'intérêt avec lequel les astronomes étudient l'orbite d'Éros, la planète qui se rapproche le plus de la Terre, et calculent dès maintenant sa trajectoire exacte au voisinage de son prochain passage, en 1930, au minimum de distance de la Terre (*). C'est ce qui explique aussi l'importance des observations de la planète Mars, lors de son opposition de 1924. L'observatoire du Cap a publié le résultat de ses observations (11). Les mesures effectuées sur les plaques photographiques donnent une distance de Mars à laquelle correspond une parallaxe solaire moyenne de 8″,809. Ceci définit un demi-grand axe de l'orbite terrestre tel qu'un observateur apercevrait sous cet angle de 8″,809 un rayon équatorial de la Terre disposé transversalement. Quant aux observations visuelles, elles n'ont pas donné de résultat satisfaisant, mais la raison de cet échec a pu être étudiée : il s'agit de l'erreur d'origine physiologique connue sous le nom d'effet Purkinje.

A l'observatoire de Berlin-Babelsberg, on a mis à profit les circonstances favorables du début de 1925, pour entreprendre une nouvelle mesure du diamètre de Vénus (12). Le résultat correspond à un diamètre angulaire de 17″,366

(*) La détermination de l'orbite d'une planète, après un nombre suffisant d'observations, se fait, en première approximation, dans l'hypothèse où la masse des autres planètes serait négligeable par rapport à la masse du Soleil. C'est dans cette hypothèse que, par rapport à des axes dont les directions sont fixes dans le solide stellaire, la planète décrirait, autour du Soleil comme foyer, et conformément à la loi des aires, une section conique, et par définition même du mot planète (par opposition à celui de comète) cette section conique serait une ellipse. On garde la même approximation en négligeant aussi, en regard de celle du Soleil, la masse de la planète considérée, et le problème comporte, alors, la détermination de six inconnues, ce qui exige au moins trois observations complètes. Cette détermination des six éléments elliptiques d'une planète après trois observations s'effectue par la méthode de Laplace, la méthode de Gauss ou l'une de leurs diverses variantes (10).

pour un observateur dont la distance serait le demi-grand axe de l'orbite terrestre. L'approximation de ce nombre est longuement discutée : pour en donner une idée ici, il suffira de signaler que les résultats correspondants déduits l'un de la première moitié des observations, l'autre de la deuxième sont respectivement 17″,380 et 17″,330.

La théorie de la rotation de la Terre néglige généralement les très petits termes qui introduiraient dans cette rotation des inégalités à courte période. D'autre part, la théorie du mouvement de la Lune est très imparfaite, et ne peut être mise d'accord avec l'observation que moyennant l'introduction de petits termes empiriques analogues à celui que le Mécanique non relativiste est obligée d'introduire dans les tables du mouvement de Mercure pour faire cadrer ces tables avec l'observation (13). R. T. Innès rend compte des termes inexpliqués du mouvement lunaire en attribuant une variation séculaire au mouvement de rotation de la Terre ; de plus, cette variation diminue sensiblement les anomalies observées dans les passages de Mercure devant le Soleil et dans les instants des éclipses des deux premiers satellites de Jupiter : le siècle allant de 1780 à 1880 aurait été plus long de 30 secondes que le siècle allant de 1800 à 1900 (14).

A l'occasion du calcul de la parallaxe solaire, on vient de rappeler l'opposition de Mars en 1924. Les journaux astronomiques de 1925 renferment un grand nombre d'articles sur les observations que favorisait cette circonstance. Une nouvelle détermination du diamètre a été faite à l'observatoire Lick (15) ; elle a conduit à un diamètre (polaire) apparent de 9″,26 pour un observateur qui serait distant du demi-grand axe de l'orbite terrestre, tandis qu'en 1895, Campbell avait trouvé 9″,25 ; les erreurs d'observations absorbent la différence de ces deux résultats. — On trouvera les photographies et dessins les plus intéressants de la planète dans les articles indiqués ci-dessous, en note (16). Nous nous arrêterons ici aux études de Pickering (17) et particulièrement à celles de ces études qui sont relatives à la pression et à la température. On estime généralement que la pression atmosphérique est sensiblement moindre à la surface de Mars qu'à la surface de la Terre, dans un

rapport de 1/4 à 1/10. Les raisons qu'on en donne sont liées à la faible pesanteur à la surface de Mars, à la manière dont l'éclat de la planète varie du centre au bord du disque, à la netteté des détails aperçus sur toute la surface de celui-ci, et à certaines similitudes de Mars et de la Lune. L'auteur discute ces arguments et ne leur reconnaît que bien faible valeur. Au contraire, s'appuyant sur les mouvements et la couleur des nuages martiens, sur la comparaison de photographies à la lumière bleue et aux rayons infra-rouges et sur la température de la planète, l'auteur estime que la pression atmosphérique à la surface de Mars doit être très voisine de la pression qui règne à la surface de la Terre. Il discute aussi des résultats récents relatifs à la température de Mars, et conclut que, sous le rapport de la température comme de la pression atmosphérique, les conditions physiques à la surface de Mars ne diffèrent guère des conditions physiques à la surface de la Terre.

D'autre part, W. W. Coblenz a publié d'importantes études sur la même question (18). Les observations se sont faites au moyen de l'un de ces merveilleux dérivés de la pile thermoélectrique dont la sensibilité est presque incroyable. Les températures conclues vont de — 10 à 5° dans les régions brillantes de la planète, de 10 à 20° et peut-être même plus haut dans les régions obscures. Les variations dans ces intervalles ont pu être parfaitement étudiées avec le cours des saisons, et ceci constitue une contribution extrêmement précieuse à la climatologie et à la météorologie de Mars. Enfin, en février 1925, au Mount-Wilson, des observations spectroscopiques ont rendu certaine la présence de vapeur d'eau et d'oxygène libre dans l'atmosphère de cette planète, à savoir d'environ 5 et 15 % de ce que, normalement, en renferme respectivement l'atmosphère terrestre(19).

Étoiles

La masse des étoiles doubles. — L'un des problèmes principaux de l'Astronomie est celui de la répartition des masses dans chacun des systèmes stellaires dont l'Univers semble constitué. Ces masses s'y trouvent distribuées sous

forme d'étoiles et de nébuleuses (20). Aussi, pour ne parler actuellement que des étoiles, attache-t-on grande importance aux méthodes de détermination des distances stellaires (21), et de même faut-il attacher grande importance aux méthodes de détermination des masses des étoiles. Ces dernières méthodes ne sont pas nombreuses, et la meilleure n'est applicable, par nature, qu'aux deux composantes des systèmes binaires, aux étoiles doubles.

Les étoiles doubles visuelles sont celles dont les deux composantes, eu égard à l'éloignement du système, sont assez distantes pour s'apercevoir individuellement dans le champ des instruments d'observation, et pour que, par conséquent, la position de l'une de ces composantes puisse être, à chaque instant, définie géométriquement par rapport à l'autre. Des observations suffisamment nombreuses permettent le tracé de l'orbite apparente du compagnon par rapport à l'étoile principale, projection de l'orbite vraie sur le plan perpendiculaire à la ligne de visée, et permettent, par suite, en une opération analogue à une restitution perspective, le tracé de l'orbite vraie (22). Celle-ci est une ellipse dont l'étoile principale occupe un foyer, et la connaissance du grand axe de cette ellipse fournirait immédiatement la somme des masses des deux composantes. Mais c'est en unités de longueur, comme en kilomètres, que, pour ceci, ce grand axe devrait être connu, tandis que, les observations n'ayant porté que sur des distances angulaires, en secondes, le grand axe de l'orbite vraie n'est encore exprimé qu'angulairement. La somme des masses d'un système binaire visuel ne sera donc connue que lorsqu'on saura, de plus, quelle est la distance, ou la parallaxe, du système.

Représentons-nous maintenant un système binaire suffisamment éloigné ou dont les composantes sont suffisamment voisines pour que celles-ci ne puissent pas être visuellement séparées (ni photographiquement) dans le champ des instruments d'observation. Supposons aussi que le plan (de direction invariable par rapport aux axes des principes de la Mécanique) dans lequel les deux composantes tournent l'une autour de l'autre, ou autour du centre de gravité de leur système, soit sensiblement incliné sur le plan perpendiculaire à la ligne de visée de l'observateur terrestre. Pério-

diquement, chacune des composantes s'éloigne et se rapproche de cet observateur : lorsque l'une s'éloigne, l'autre se rapproche. Le spectre de chacune des étoiles va manifester cet éloignement ou ce rapprochement par un déplacement des raies soit vers l'extrémité rouge, soit vers l'extrémité violette du spectre, respectivement ; et ce déplacement permet à chaque instant, en kilomètres par seconde, le calcul de la vitesse radiale, éloignement ou rapprochement. Le diagramme qui exprimera de pareilles observations suffisamment prolongées portera deux courbes de vitesses radiales, une pour chaque composante du système. On en déduira le rapport des axes des orbites elliptiques décrites par les deux astres autour du centre de gravité du système, et, par conséquent, le rapport de leurs masses (23). De plus, l'unité de longueur étant cette fois linéaire, comme le kilomètre, il suffit qu'un système binaire ait pu être étudié comme système visuel et comme système spectroscopique, pour que, sans mesure de parallaxe, celle-ci se déduise de cette étude même, par le calcul, en même temps que les masses des deux composantes, exprimées, par exemple, au moyen de la masse du Soleil pour unité (24).

Les systèmes binaires qui réalisent toutes ces conditions sont jusqu'ici peu nombreux. Un mémoire récent d'Eddington n'a pu en réunir que quinze (25). Les masses stellaires ne se montrent jamais d'un ordre bien différent de celui de la masse du Soleil : le système le plus massif est celui de Capella, α Cocher, dont les composantes ont des masses qui valent 4,18 et 3,32 fois celle du Soleil ; le système le moins massif est celui de θ_2 Éridan, dont les composantes ont des masses qui valent 0,21 et 0,20 fois celle du Soleil.

Quant aux variables du type Algol, β Persée, dont la grandeur demeure quasi constante pendant la plus grande partie de la période, pour perdre rapidement, puis reprendre rapidement une grande partie de leur éclat, on les étudie avec succès comme les composantes principales de systèmes binaires dont l'étoile satellite est obscure, et dont le plan de l'orbite n'est pas très éloigné de renfermer le rayon visuel de l'observateur terrestre. Ce sont des variables à éclipses, et la diminution d'éclat est due au passage du compagnon obscur devant l'astre brillant. Elles s'étudient par leur

courbe de lumière (26). Si on possède à la fois la courbe de lumière et les lignes spectroscopiques des vitesses radiales des deux composantes (dont la moins brillante ne doit donc être que relativement obscure, de manière à donner encore un spectre visible), on peut calculer la somme des masses de ces deux composantes. Eddington tire des travaux de Plaskett et de Shapley, une table relative à treize pareils systèmes, de V Pouppe, 19,2 fois la masse du Soleil, à W Grande Ourse, 0,74, en passant par β Lyre, 13,9.

Telles sont les étoiles dont les masses sont actuellement connues par des méthodes purement géométriques et dynamiques (27). Eddington y ajoute les céphéides. — On sait que ce sont des variables dont la période est très courte, de l'ordre de quelques jours. Elles doivent leur nom à δ Céphée, dont la période est de 5,4 jours (28). Deux hypothèses se disputent l'explication de ces phénomènes : pour l'une, les céphéides sont des systèmes binaires un peu particuliers, avec des composantes très voisines et qui provoquent, de l'une à l'autre, de formidables marées de matière incandescente ; pour l'autre, qui est l'hypothèse des pulsations, ces astres seraient périodiquement le théâtre d'immenses perturbations d'origine interne, assimilables à des explosions (29). C'est cette dernière hypothèse qu'adopte Eddington, et il en tire (par l'intermédiaire de la température déduite du type spectral) la masse de l'étoile : en masses solaires, la masse de δ Céphée serait 11,3 (30).

Physique stellaire (31). — Nous connaissons ainsi les masses de 40 à 50 étoiles. — Nous connaissons aussi la distance et par conséquent la grandeur absolue d'au moins l'une d'elles, Capella. L'examen des spectres permet l'évaluation des températures (32). Rapprochons la masse et la température de chacune de ces étoiles de la masse et de la température de Capella, et appliquons les lois des gaz parfaits, traitant pour un instant toutes ces étoiles, naines et géantes, comme des géantes. Nous en déduirons, sous réserve de cette inadvertance, les différences entre leurs grandeurs absolues et la grandeur de Capella (*), et par conséquent,

(*) On a déjà rappelé, dans ces revues annuelles, la signification des nombres exprimant la grandeur ou la magnitude des étoiles :

telles quelles, leurs grandeurs absolues (33). — Si maintenant, avec Eddington, nous adoptons la masse et la grandeur absolue de chacune des étoiles considérées comme les deux coordonnées planes, abscisse et ordonnée, d'un point, nous voyons tous les points correspondants se ranger sensiblement le long d'une ligne d'une régularité satisfaisante. Une discussion montre que les écarts de part et d'autre de cette ligne peuvent être attribués aux incertitudes dont les données sont affectées. Qu'il en soit vraiment ainsi, et ceci est la découverte d'une loi bien déterminée entre les masses et les grandeurs absolues des étoiles : la connaissance de la couche du diagramme équivaut à la connaissance de la loi (34).

Il faut maintenant se rendre compte de ce que cette découverte a d'inattendu. — Plus de la moitié des étoiles envisagées étaient des naines. D'après la théorie habituelle, qui comporte la distinction entre étoiles naines et géantes, l'application des lois des gaz parfaits que nous avons faite à toutes les étoiles, devait être illégitime dans plus de la moitié des cas, et nous ne pouvions pas nous attendre à voir les étoiles naines, comme notre Soleil, témoigner que les lois des gaz parfaits leur sont applicables, en se soumettant à la même loi que les étoiles géantes.

Leur faible éclat serait donc uniquement attribuable à leur masse relativement petite, sans qu'il y ait lieu de faire appel à quelque autre différence physique. On est bien près d'en déduire que la distinction entre naines et géantes doit être abandonnée. La densité d'une étoile pourrait même devenir extrêmement grande sans que les lois des gaz parfaits cessent

R. Q. S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 170, et t. 8 (1925, 2), p. 221. — Si E_0 est l'éclat (apparent) d'une étoile de la première grandeur (Aldébaran, α Taureau) et E l'éclat (apparent) d'une étoile dont la grandeur est m, la relation entre m et E est la suivante

$$E = E_0 \cdot 10^{0,4\,(1-m)}$$

et un tableau des valeurs de E/E_0 a été dressé. Cette formule indique la signification d'une grandeur nulle ou négative: — La *grandeur absolue* d'une étoile est ce que serait sa grandeur apparente pour un observateur à la distance de 10 parsecs, c'est-à-dire pour qui la parallaxe de l'étoile serait 0″,1 (distance de 32,5 années de lumière).

de leur être applicables. Il ne faut pas traiter la matière stellaire comme les atomes aux températures ordinaires : dans les étoiles l'ionisation doit être très grande, les atomes doivent avoir perdu presque tous leurs électrons, leurs dimensions doivent être, de ce chef, extrêmement réduites, au cent millième peut-être de ce qu'elles seraient aux températures ordinaires ; ainsi, la densité d'un gaz stellaire pourrait devenir cent mille fois plus grande avant que les lois des gaz parfaits cessent de lui être applicables (35).

Cette étude date déjà de près de deux années et il y a été fait rapidement allusion dans cette Revue d'Astronomie pour 1923 (36). On devait s'attendre à ce qu'elle ne reste pas sans réponse. Aussi le début de 1925 a-t-il vu paraître un travail étendu de Jeans sur la même question (37). — Qu'il existe, comme le veut Eddington, une loi bien déterminée entre la masse et l'éclat d'une étoile, équivaut à dire, pratiquement, que l'état physique d'une étoile est entièrement déterminé par la masse seule, qu'il en est ainsi, en particulier, de la température. Ainsi, si la masse d'une étoile est constante, il en est de même de sa température, et il faut entièrement renoncer à tout ce qui a été dit sur l'évolution stellaire. Au contraire, si le rayonnement entraîne une diminution de masse, on peut encore parler d'une évolution stellaire, mais les idées sur celle-ci auxquelles on s'était habitué doivent être profondément revisées. — C'est cette complète détermination de l'état physique d'une étoile, dès que sa masse est donnée, que Jeans n'admet pas. Pour lui, et par sa théorie, la détermination de l'état physique d'une étoile exige que deux quantités soient fixées : par exemple, la masse et la température superficielle. En d'autres termes, pour Jeans, à une masse stellaire donnée peuvent correspondre une infinité de valeurs de l'éclat, suivant la valeur que l'on attribue, de plus, à la température superficielle ; le diagramme définissant l'état stellaire ne pourra plus être dessiné dans un plan, mais aura besoin des trois dimensions de l'espace : c'est un point de l'espace qui représentera chaque étoile, comme le faisait un point du plan dans le diagramme d'Eddington, et les trois coordonnées de ce point seront des longueurs exprimées au moyen de la masse, de l'éclat et de la température superficielle. A l'infinité

simple de points du diagramme plan définissant, le long d'une courbe, tous les états physiques possibles d'une étoile, doit être substituée l'infinité double de points de l'espace définissant, sur une surface, tous ces états physiques. Il est vrai qu'il y a une loi de la physique stellaire, mais cette loi lie la masse, l'éclat et la température ; c'est une loi entre trois, et non pas deux, variables, une loi à deux variables indépendantes.

De l'étude de Jeans, il faut ici dégager deux choses. A quel instant la théorie d'Eddington perd-elle, par rapport à celle de Jeans, une variable indépendante, un degré de liberté ? — et que faut-il penser des saisissantes confirmations expérimentales de la théorie d'Eddington ?

Quelle que soit l'orientation donnée à un plan passant en un point quelconque d'un fluide, la résultante des pressions agissant en ce point de l'un à l'autre côté de cette surface est perpendiculaire à celle-ci. C'est ce qu'on exprime en disant qu'en tout point d'un fluide n'existent que des efforts normaux, par opposition aux efforts tangentiels qui se développent dans la déformation des solides élastiques. De plus, en tout point d'un fluide, la pression à travers un élément plan est indépendante de l'orientation de celui-ci : la pression ne dépend, à chaque instant, que de la position du point matériel considéré. D'autre part, cette pression en tout point du fluide résulte des forces d'attraction qu'exercent tous les autres points matériels du milieu, et de la pression de radiation, pression de la lumière, généralement négligeable aux températures ordinaires, dans les phénomènes terrestres, mais dont le rôle est important aux très hautes températures qui règnent dans les couches profondes des étoiles. D'après Jeans, Eddington soustrait aux états physiques stellaires un degré de liberté en attribuant, du centre à la surface de l'étoile, une même valeur au rapport de la pression de radiation à la pression gazeuse totale. Or d'après Jeans, ce rapport varie en raison inverse de la quatrième puissance de la température, c'est-à-dire, du centre à la surface de l'étoile, d'une manière énorme, et il ne faudrait pas s'étonner de le voir se réduire dans le rapport de mille à l'unité.

Quant aux confirmations expérimentales, elles n'auraient

pas la portée qui leur a été attribuée. Les points du diagramme d'Eddington représentatifs des étoiles ne se distribuent pas le long d'une même ligne, et il n'est que trop facile d'en rendre responsables les erreurs d'observation. En réalité, le diagramme plan doit porter une infinité de lignes, dont chacune est définie par une valeur particulière de la température superficielle de l'étoile ; et les points représentatifs des étoiles appartiennent à toute la bande du plan qu'occupe l'ensemble des courbes définies par toutes les valeurs admissibles des températures. Il n'est pas difficile d'expliquer que cette bande soit relativement étroite et ait pu donner, pour les points qui l'occupent, l'impression d'une grossière distribution le long d'une ligne assez régulière. D'abord il existe une température inférieure, à partir de laquelle, si on la diminuait, les étoiles cesseraient d'être visibles, et les points représentatifs des étoiles se trouvent nécessairement tous, sur le diagramme plan, d'un même côté de la courbe définie par cette température extrême. Il doit aussi y avoir une température extrême supérieure, au delà de laquelle le rayonnement d'énergie s'intensifierait au point de ramener immédiatement la surface en dessous de cette température. Les points du diagramme d'Eddington ne sont pas sur une même ligne, mais distribués dans toute la bande du plan limitée par les courbes que définissent ces deux températures extrêmes.

Naturellement, la réponse n'a pas tardé (38). On savait parfaitement qu'on faisait une hypothèse restrictive, qu'on se privait d'un degré de liberté, mais toute la question est de savoir si cette hypothèse n'est pas légitime, et pour ceci il n'y a qu'un témoignage admissible, la confrontation expérimentale. Celle-ci montre que les points représentatifs des états physiques stellaires appartiennent à une étroite bande du plan rapporté à des axes des masses et des éclats : cela suffit. Il en est toujours ainsi dans la découverte des lois physiques. La bande du plan est assimilée à une courbe, et sa largeur est attribuée aux erreurs d'observations. Il existe une approximation à laquelle on peut écrire une loi entre la masse et l'éclat, et cette approximation se montre satisfaisante. La loi d'Eddington équivaut à dire que les deux températures extrêmes de Jeans peuvent être

confondues à une approximation qui est celle à laquelle il est actuellement légitime de traiter les problèmes de Physique stellaire. Réponse qui n'est peut-être pas définitive, car une difficulté de calcul reste à élucider, et il faut s'attendre à une réplique de Jeans. Cette discussion n'en cause pas moins, dès maintenant, le plus grand plaisir au lecteur qui la dégage de son symbolisme mathématique, qui y aperçoit le rôle si important que jouent, quoique presque toujours dans les coulisses, ces personnages que sont l'approximation et les erreurs fictives d'observations, et qui y reconnaît un exemple typique de la marche que suit presque nécessairement l'esprit dans la recherche de la vérité (39).

Cosmogonie stellaire

Hypothèse de Lockyer et de Russell.— On a vu de combien près la discussion qui vient d'être rapportée touche à la théorie des étoiles naines et des étoiles géantes. Elle a eu par là un retentissement immédiat sur les théories cosmogoniques relatives à l'évolution stellaire. — Rappelons le fondement de cette théorie, tel que le fournit l'observation. — Dressons une table à trois colonnes, dont la première renferme les noms de toutes les étoiles dont on connaît la température et la grandeur absolue, et dont les deux autres renferment ces deux nombres. Pour préparer la représentation graphique de cette table, rapportons un plan à deux axes, le long desquels nous porterons des longueurs proportionnelles aux températures, et des longueurs proportionnelles aux luminosités absolues, respectivement. A chaque ligne de la table, avec son couple de nombres, donc à chaque étoile mentionnée dans cette table, correspondra un point du plan. Il s'agit de voir si ces points vont être, ou non, répartis dans le plan d'une manière quelconque. — Ils ne le sont pas : ces points sont manifestement, aux erreurs admissibles près, distribués le long d'une ligne. Cette ligne semble bien constituée de deux droites : l'une, que nous appellerons la branche G, le long de laquelle il y a diminution de l'éclat en même temps qu'augmentation de la température ; l'autre, que nous appellerons N, le long de laquelle il y a encore diminution de la grandeur absolue, mais aussi

diminution de la température. Tel est le fameux diagramme en branches de compas : c'est au sommet de l'angle qu'il dessine que correspond la plus haute température le long de l'ensemble des deux branches ; si nous suivons celles-ci en passant de G à N, nous rencontrons, avant le sommet, les points représentatifs d'Arcturus, de Capella..., le sommet lui-même est occupé par Sirius, et voici successivement, sur la branche N, Procyon, le Soleil, α Centaure. — Autre fait : les étoiles figurées sur la branche G ont des densités comparables à celle de l'air, tandis que c'est à celle de l'eau que sont comparables les densités des étoiles figurées sur la branche N : c'est aux premières qu'on a donné le nom d'étoiles géantes, aux secondes le nom d'étoiles naines, parmi lesquelles notre Soleil, avec sa densité de 1,4 ; au sommet du compas, Sirius sépare les deux classes, avec sa densité voisine de 0,1. — On voit déjà que par ces dénominations de géantes et de naines, et par le passage qu'elles comportent des densités aux volumes, on admet que toutes les étoiles ont à peu près la même masse. Mais ce n'est pas encore tout à fait une hypothèse ; tout au plus peut-on dire que c'est une généralisation hardie : les étoiles qui se prêtent à ces mesures montrent presque toutes des masses qui sont de l'ordre de celle du Soleil.

Voilà les faits. — L'hypothèse est la suivante : que les divers points de la ligne G N définissent des états par chacun desquels a passé ou passera toute étoile. Pour raconter l'histoire d'une étoile quelconque, il suffit de partir de l'extrémité libre de la branche G, là où la température est tout juste suffisante à ce que l'astre soit visible ; à cette basse température l'étoile est rouge, mais sa densité est très faible, c'est une géante dont le volume est énorme et l'éclat très grand, mesuré par une magnitude absolue de — 1 : à une température qui aurait atteint 4000°, elle pourrait s'appeler Arcturus. — Mais la densité diminue, et la contraction élève la température, le spectre s'allonge à partir du rouge, bientôt l'étoile est jaune, sans que cette élévation de température suffise à compenser la diminution de surface rayonnante : aussi l'éclat a-t-il diminué, et la grandeur absolue devient-elle voisine de 0 : — c'est l'une puis l'autre des deux composantes du système Capella, aux tempéra-

tures de 5000 et de 7000°. Les phénomènes se poursuivent dans le même sens : contraction, la géante se rapetisse, la température augmente encore, le spectre s'étend vers le violet, l'étoile bleuit, la magnitude arrive à 1 : c'est Sirius, à la température de 10500°. — Sirius est au point singulier du diagramme : la contraction ne s'arrête pas, cause de dégagement de chaleur ; la surface rayonnante et l'éclat continuent à décroître, mais la densité devient trop élevée pour que les lois des gaz parfaits soient encore applicables, et le dégagement de chaleur dû à la contraction devient insuffisant à compenser les pertes par rayonnement ; la température diminue, le spectre se raccourcit par l'extrémité violette, et l'étoile désormais naine, se retrouve dans la classe des étoiles, jaunes : tels sont aujourd'hui, de plus en plus froids, Procyon, notre Soleil, les deux composantes du système α Centaure, avec leurs magnitudes absolues de 3, de 5, de 6, et leurs températures voisines de 6000°. — La contraction augmente, le refroidissement se poursuit, le spectre visible se concentre de plus en plus vers le rouge, et voici, types des étoiles près de redevenir invisibles, avec des magnitudes absolues de 10 et de 11, et des températures réduites à 3000°, les deux composantes (principales) du système (triple) dit Krüger 60, dans la constellation de Céphée.

Hypothèse de Jeans. — Les travaux récents de Jeans, au cours de sa discussion avec Eddington (40), devaient l'amener à modifier cette conception presque classique de l'évolution stellaire. Nous avons vu que, pour Jeans, l'état physique d'une étoile dépend de deux paramètres, deux variables indépendantes, et lorsque nous prenions pour ces variables indépendantes la masse et la magnitude absolue, à tout couple de valeurs numériques données à celle-ci correspondait forcément une valeur bien déterminée de la température. Inversement, si nous prenons pour variables indépendantes la température et la magnitude absolue, à tout couple de valeurs numériques données à celle-ci correspond forcément une masse bien déterminée, la seule masse compatible avec les conditions d'équilibre thermodynamique d'une étoile de cette température et de

cet éclat. En somme, la représentation graphique de tous ces états d'équilibre, chacun par un point du plan dont les coordonnées sont température et éclat, et coté de la masse correspondante, constitue la projection, sur le plan des températures-éclats, de la surface de Jeans dont nous avions jusqu'ici considéré la projection sur le plan des masses-éclats. Il nous est loisible de mener à travers ce nouveau diagramme les lignes lieux des points auxquels correspond telle valeur constante de la masse ; par exemple, telle de ces lignes, qui porte la cote 1, partage la figure en deux régions : les points de l'une représentent des étoiles dont la masse est nécessairement moindre que celle du Soleil, et plus massives que celui-ci sont les étoiles que figurent les points de l'autre région.

A toute étoile correspond un point du plan, mais à tout point du plan ne correspond pas certainement une étoile : pas d'étoile qui puisse correspondre aux points dont la coordonnée température serait insuffisante à ce que cette étoile soit visible. De même, une température suffisamment élevée rendrait l'étoile invisible ; en effet des températures de plus en plus hautes provoquent une ionisation de plus en plus proche d'être complète : à la température pour laquelle il y aurait ionisation totale, où tout atome aurait perdu tous ses électrons, tout rayonnement serait paralysé, et il ne pourrait plus être question, en particulier, de visibilité de l'étoile : on peut penser que l'étoile cesserait d'être visible à la température qui entraînerait l'ionisation de 99 % de ses atomes : cette température est d'autant plus élevée que la masse est plus grande ; elle est bien proche d'être atteinte pour Sirius, tandis que, dans le Soleil, l'ionisation ne doit atteindre que 60 %.

Cette température supérieure est l'une des caractéristiques de l'hypothèse que Jeans oppose à l'hypothèse de Russell. Il y en a, me semble-t-il, deux autres qui, de même que cette première, s'accordent avec les faits aussi bien que la conception classique : l'une est relative à la masse des étoiles, l'autre à l'allure de la ligne figurative de leur évolution.

L'hypothèse de Russell considérait comme négligeable la perte de masse de l'étoile au cours de son évolution. Dans l'hypothèse de Jeans cette perte serait difficilement

négligée. Pour garder une masse invariable, une étoile ne pourrait évoluer que de façon que son point figuratif décrive une de ces lignes définies ci-dessus, sorte de courbes de niveau dont chacune est cotée d'une certaine masse. Cependant les variations nécessaires ne seront jamais très considérables : à la température de 6000°, qui est celle de la géante Capella et de la naine Soleil, à des grandeurs absolues 5 et —3 correspondent respectivement des masses dont l'une est égale à celle du Soleil et dont l'autre n'est que seize fois plus grande : à la température et à l'éclat de la composante principale du système Capella correspond une masse égale à quatre fois celle du Soleil. On sait que le rayonnement comporte une lente diminution de masse (41) et les durées nécessaires à l'évolution stellaire sont naturellement suffisantes à expliquer une réduction de la masse au quart de sa valeur dans le passage d'une géante jaune à une naine de même température (42).

Quant à la ligne représentative de l'évolution stellaire, elle perd, dans l'hypothèse de Jeans, son point singulier, ce sommet de compas qu'occupait Sirius, et ceci lui donne plutôt l'allure d'une parabole, la convexité tournée vers les températures croissantes. De plus, elle est, suivant la masse à telle température, l'une quelconque d'une infinité simple de lignes possibles, et dont chacune est, dans le plan des températures-luminosités, la projection d'une certaine ligne tracée sur la surface de Jeans, représentative de la masse en fonction de ces deux variables indépendantes. — Voici donc quelle serait, dans cette hypothèse, l'histoire d'une étoile. — L'astre devient visible à l'état de géante ou de supergéante, de très faible densité, avec une masse et un éclat considérables, et une température d'autant moins élevée que la masse est plus grande. Pendant tout le cours de l'évolution la masse et l'éclat vont diminuer ; il en sera de même du volume, non seulement à cause de la perte de masse, mais surtout à cause de la contraction de plus en plus grande ; et il ne nous restera à considérer que les variations de la température. — Pendant toute la première partie de la contraction la température augmente ; l'étoile rouge devient de plus en plus claire, jaune, puis bleue : le pourcentage des atomes ionisés est de plus en plus élevé

la production d'énergie décroît rapidement, et l'étoile, à la température pour laquelle l'ionisation est voisine de 99 °/₀, atteint un état d'équilibre pour lequel la production d'énergie est égale au rayonnement qu'imposent les valeurs actuelles de la masse et de la température. A partir de cet instant la température va décroître ; l'étoile, devenue naine, va reprendre les spectres dans lesquels la radiation dominante glissera progressivement de l'extrémité violette à l'extrémité rouge, et, devenue invisible, son rayonnement refoulé dans l'infra-rouge, elle aura terminé la partie de son existence pendant laquelle nous sommes capables de nous y intéresser.

Hypothèse d'Eddington. — On voit que, dans l'hypothèse de Jeans, la distinction entre naines et géantes conserve toute son importance. — De la théorie d'Eddington ne pouvait guère sortir qu'une hypothèse dans laquelle il faudrait des efforts tout spéciaux pour sauver cette distinction (43). Eddington admet comme indiscutables les faits sur lesquels Lockyer a assis son hypothèse, et exprimés par le diagramme en branches de compas, sauf bien entendu, pour le moment, la quasi-constance de la masse, justifiant les dénominations de géantes et de naines, et qui est déjà de l'interprétation. — A partir de ceci, il y a, pour entrer dans l'hypothèse, deux cas à considérer, suivant que l'on est disposé à rejeter ou à admettre la possibilité d'une variation considérable de la masse.

Si, quelque grandes que soient les durées d'évolution stellaire, on ne peut considérer le rayonnement comme suffisant à expliquer une importante diminution de la masse, et si on n'aperçoit pas d'autre explication à cette diminution, il n'est pas possible d'envisager la transformation d'une étoile très brillante dans une étoile peu brillante à la même température, moyennant le passage par une étoile d'éclat intermédiaire mais à beaucoup plus haute température : telle serait la transformation de Capella dans ce qui est actuellement le Soleil, moyennant le passage par l'état que représente aujourd'hui Sirius. En effet, aux grandeurs absolues des deux étoiles de même température que sont Capella et le Soleil, la théorie d'Eddington, avec sa loi

qui impose telle masse pour telle luminosité, attribue des masses très différentes. Si la masse est constante, il faut, par cette loi, que l'éclat soit constant, et la température seule pourrait varier : dans le diagramme rapporté à des axes des températures et des éclats, la ligne représentative de l'évolution d'une étoile ne pourrait être qu'une parallèle à l'axe des températures, plus ou moins distante de cet axe suivant la masse de l'étoile considérée. Le long de cette ligne, l'étoile évoluerait dans le sens des températures croissantes si l'énergie dont elle est la source était due uniquement à sa contraction progressive : elle pourrait évoluer dans l'autre sens en vertu d'un autre mode de génération d'énergie, et, pour tous les modes connus et inconnus envisagés simultanément, nous ignorons si l'étoile évoluera finalement dans le sens des températures croissantes ou dans le sens opposé. Bien plutôt, le diagramme en branches de compas nous montre qu'à chaque valeur de l'éclat, donc de la masse, correspond une concentration autour d'une température privilégiée. N'est-il pas naturel de conclure que cette température privilégiée est une température d'équilibre que l'étoile, conservant même masse et même éclat, gardera indéfiniment ? Dans ce cas il n'y aurait pas d'évolution stellaire, et le problème serait résolu par sa suppression.

Ce n'est que d'un point de vue très particulier que l'on pourra trouver « élégante » cette solution, et on préférera généralement, dans la théorie d'Eddington, renoncer à l'invariabilité des masses stellaires. Alors la voie en branches de compas redevient praticable, et l'histoire de toute étoile reprend la forme que lui donnait l'hypothèse de Lockyer-Russell. La divergence ne porte plus que sur l'interprétation : la diminution d'éclat d'une étoile naine est due à la réduction de sa masse, et non à une perte de compressibilité qui empêcherait les lois des gaz parfaits de lui être applicables. Quant à la réduction de la masse, elle peut fort bien être due à une libération d'énergie intra-atomique qui comporterait la destruction progressive des électrons.

Formation des étoiles doubles. — Les études théoriques de Jeans sur la Physique stellaire et la relation qu'il a découverte entre la masse, l'éclat et la température l'ont aussi

conduit à de nouvelles précisions sur les hypothèses propres à expliquer l'origine des étoiles doubles (44). Il s'agit des systèmes binaires à courte période, des systèmes spectroscopiques et des céphéides, c'est-à-dire des systèmes binaires dont les deux composantes sont extrêmement voisines, presque en contact. Nous partirons de ce fait, signalé par Campbell, que la plupart de ces étoiles présentent des spectres caractéristiques des hautes températures : classe O ou de Wolf-Rayet, spectre de raies brillantes ; classe B, étoiles à hélium ; classe A, étoiles à hydrogène. Pour interpréter ce fait, Jeans reprend son diagramme tracé dans un plan rapporté à un axe des masses et à un axe des magnitudes absolues. Comme, d'après les travaux du même auteur, la température d'une étoile dépend d'une manière bien déterminée de sa masse et de son éclat, tout point du plan définit une étoile dont la température a forcément telle valeur, et une ligne du plan renfermant tous les points à chacun desquels correspond la même température est une ligne dont les points définissent tous les états physiques possibles d'une étoile dont la température serait constante : cette isotherme est la projection d'une courbe de niveau de la surface représentative de la loi de Jeans. Le plan porte ainsi une famille d'isothermes, dont chacune définit aussi bien un type spectral, et les équations de ces lignes montrent qu'elles sont distribuées dans le plan de la manière suivante : si le point représentatif d'une étoile rouge, d'une étoile à basse température, comme du type spectral M, cheminait en ligne droite vers le point d'intersection des deux axes de repère, c'est-à-dire si l'étoile se transformait de manière que sa masse et son éclat demeurent dans le même rapport, le point mobile rencontrerait successivement les isothermes de températures de plus en plus élevées. Parti d'un point de l'isotherme à laquelle appartiennent les étoiles du type M, les étoiles rouges comme Antarès (α Scorpion), il rencontrerait successivement, et d'une manière continue, tous les intermédiaires, les isothermes auxquelles appartiennent Arcturus (α Bouvier) et les autres étoiles de la classe K, dont les spectres sont les plus riches en raies métalliques, le Soleil et Capella (α Cocher) qui montrent déjà les raies de l'hydrogène, Procyon (α Petit

Chien), type des étoiles à calcium, et atteindrait les isothermes le long desquelles se distribuent les étoiles des types A, puis B, puis O, et parmi lesquelles les étoiles doubles dont il doit être question ici.

Ainsi, si une étoile du type M venait à se briser en deux astres de masses égales, et par conséquent d'éclat moitié moindre que l'étoile primitive, la température devrait s'élever au point que l'étoile double ainsi formée aurait des composantes qui appartiendraient au type B. Ceci invite déjà à penser que, inversement, les étoiles doubles des types O, B, A proviennent d'étoiles froides qui se seraient brisées. Mais cette égalité entre les masses des deux composantes n'a été écrite ici que pour fixer les idées, et il importe de voir comment se briserait une étoile arrivée dans des conditions dynamiques incompatibles avec sa stabilité.

Il faudrait reprendre les difficiles problèmes dans lesquels la Mécanique rationnelle recherche les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène en mouvement de rotation et étudie les conditions de stabilité de ces figures (45). Les données du problème sont la masse, la densité et la vitesse de rotation. De ces trois quantités, la masse seule reste sensiblement constante au cours de l'évolution stellaire : en effet, lorsque l'étoile se contracte, sa densité augmente ainsi que sa vitesse de rotation. Mais, au cours de cette évolution, il y a contraction et augmentation de la vitesse angulaire, de façon que celle-ci multipliée par le moment d'inertie (par rapport à l'axe de rotation) donne un produit invariable, somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de rotation. Aussi est-il avantageux de substituer ce produit à la vitesse de rotation, et, en vue des applications cosmogoniques, les données du problème dont une seule, la dernière, sera variable, seront décidément la masse, la somme des moments des quantités de mouvement, et la densité.

Pour des valeurs suffisamment faibles de la densité, à partir de zéro, la seule configuration possible d'équilibre est un ellipsoïde de révolution aplati, aplati d'autant plus que la densité est plus éloignée de zéro, et cette figure d'équilibre est stable. Lorsque la densité atteint telle valeur numérique, d'autant plus élevée que la masse est plus grande

et que la somme des moments des quantités de mouvement est moindre, l'ellipsoïde de révolution acquiert un aplatissement critique caractérisé par la propriété suivante : que la densité augmente encore au delà de cette valeur d'aussi peu que l'on veuille, et il y aura une autre figure d'équilibre possible que l'ellipsoïde de révolution, à savoir un ellipsoïde non de révolution tournant autour de son moindre axe, et qui sera d'autant plus éloigné d'être de révolution que la densité l'emportera davantage sur celle à laquelle correspond l'ellipsoïde singulier ; seulement, à partir de cette configuration singulière, l'ellipsoïde de révolution cesse d'être stable, et la stabilité n'appartient plus qu'à l'ellipsoïde à trois axes inégaux (46).

Depuis les travaux de Poincaré, principalement, on sait qu'il existe d'autres figures d'équilibre, encore qu'elles n'aient pu être étudiées que dans le voisinage des ellipsoïdes d'équilibre. Lorsque la masse en rotation affecte la forme stable d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, et que la densité croît encore, cette forme se modifie d'une manière continue, et il existe, pour une densité déterminée en fonction de la masse et de la somme des moments, des valeurs numériques des rapports des trois axes deux-à-deux telles que, à partir de la forme ellipsoïdale ainsi définie, la figure peut subir une déformation infiniment petite particulière après laquelle elle réalise encore une figure d'équilibre (47). Cette figure d'équilibre infiniment voisine d'un ellipsoïde est la figure piriforme de Poincaré ; déduite de l'ellipsoïde par un raccourcissement et un épaississement vers l'une des extrémités du grand axe, par un allongement et un amincissement vers l'autre extrémité de celui-ci, le nom de figure ovoïde lui conviendrait mieux. Cette figure est instable, et il en est de même de la figure ellipsoïdale, à partir de celle dont la déformation donne naissance à la figure piriforme (48).

Il est vrai que la théorie dont les principaux résultats viennent d'être rappelés a été construite dans l'hypothèse d'un fluide homogène, et il est probable que le milieu stellaire s'éloigne de plus en plus de l'homogénéité précisément au fur et à mesure que sa condensation augmente. Nous admettrons que cette rupture progressive de l'homogénéité

n'est pas suffisante à nous empêcher d'appliquer, du moins qualitativement, les résultats de la théorie.

La masse stellaire en rotation possède, à l'époque où nous commençons à l'étudier, une densité très faible. La figure d'équilibre est un ellipsoïde de révolution, et cette figure est stable. La densité augmente ; la vitesse de rotation et le moment d'inertie varient de manière que leur produit reste constant ; l'ellipsoïde s'aplatit de plus en plus, et il arrive un instant où la figure ellipsoïdale ne maintient sa stabilité qu'à la condition que ses trois axes deviennent inégaux. Cette inégalité des trois axes s'accuse de plus en plus, et la densité acquiert la valeur pour laquelle s'offre une autre figure d'équilibre, la figure ovoïde. Mais cette figure n'est pas stable, et pour peu que la configuration de l'étoile s'en éloigne, elle s'en éloignera de plus en plus, par oscillations dont l'amplitude sera de plus en plus grande. Alternativement, la figure piriforme se renfle et se creuse dans une section grossièrement perpendiculaire à la droite qui va de l'une à l'autre de ses extrémités, et l'étranglement périodique devient de plus en plus profond, au point de finir par intéresser la section tout entière ; à cet instant la masse stellaire se divise en deux masses distinctes : c'est la naissance d'une étoile double dont les deux composantes sont extrêmement voisines. Ces composantes ne prennent pas la forme sphérique ; elles agissent l'une sur l'autre comme agissent le Soleil et la Lune sur les eaux de nos océans, et d'énormes intumescences de marée, dissipatrices d'énergie, parcourent leur surface. Avant la division, les grandes oscillations perturbatrices n'avaient, dans leur période, aucun rapport avec la période de rotation de l'étoile ; après la division, la période de révolution des marées autour de l'une comme de l'autre des composantes est nécessairement égale à la durée de révolution des étoiles l'une autour de l'autre, et cette dernière durée de révolution n'était pas autre chose, à l'instant de la division, que la durée de la rotation de l'étoile immédiatement avant cet instant.

Ces masses stellaires sont lumineuses, et nos photomètres mesurent leur éclat. A l'époque de la figure piriforme, l'éclat est soumis à des variations dues les unes à la rotation, les autres aux oscillations d'instabilité, et les périodes de ces

variations sont indépendantes; la courbe de lumière est due à leur superposition sans harmonie, et l'étoile est placée par les astronomes dans la catégorie des variables irrégulières. — L'étranglement périodique est de plus en plus profond ; les deux périodes diminuent leur désaccord ; une durée se marque de mieux en mieux, au bout de laquelle l'éclat, pour une direction donnée, repasse par la même valeur, et cette durée, de plus en plus brève au cours de l'évolution de l'étoile, est un multiple commun de la période de rotation et de celle des oscillations : le photomètre terrestre enregistre cette durée, et l'étoile prend le nom de variable à longue période. — La division est sur le point de s'opérer ; déjà la période de rotation et la période des oscillations sont en coïncidence, et la courbe de lumière enregistrée sur la Terre a sa période réduite aux quelques jours de la durée de rotation : elle est du type observé pour δ Céphée, et l'étoile est une céphéide. — Enfin la rupture est complète; l'astre s'est transformé dans un système binaire, mais avec des composantes généralement trop voisines pour que nos instruments puissent les séparer. Si le plan de leurs orbites n'est pas perpendiculaire à la ligne de visée, il y aura alternativement, par rapport à nous, éloignement d'une composante et rapprochement de l'autre ; le spectre décèlera ces vitesses radiales, et nous serons en présence d'une étoile double spectroscopique (49).

Nébuleuses

Distances des nébuleuses spirales.— Il est presque certain que les nébuleuses spirales constituent des univers stellaires analogues à celui, la Galaxie, auquel appartient notre Soleil (50). Le sort de cette hypothèse dépend naturellement des dimensions de la Galaxie, de notre situation au sein de celle-ci et des distances des nébuleuses spirales. Cette importante question des distances des nébuleuses spirales a fait l'objet d'un article étendu de K. Lundmark (51). L'auteur y distingue des méthodes directes et indirectes pour la détermination de ces distances. Les premières sont indépendantes de toute supposition sur la nature physique des objets célestes considérés.

Il n'est pas possible de songer à déterminer les distances des nébuleuses spirales par la méthode trigonométrique qui ne se montre applicable qu'aux étoiles les plus proches. et qui consiste à observer l'objet céleste de deux points aussi éloignés que possible de la trajectoire terrestre. — Un essai basé sur les vitesses avec lesquelles les nébuleuses spirales s'approchent ou s'éloignent de la région que nous occupons semble aussi bien aléatoire. Ces vitesses ont été mesurées, principalement par V. Slipher (52) d'après les déplacements des raies spectrales et en application du principe de Doppler-Fizeau. Eddington a publié (53) une table mise à jour en 1922 des résultats de Slipher. Cette table renferme les vitesses radiales de 41 nébuleuses spirales. Ce sont presque toutes des vitesses d'éloignement, et très considérables. Cinq nébuleuses seulement se rapprochent de nous, et il s'agit, pour deux d'entre elles, de vitesses de quelques dizaines de kilomètres par seconde, inséparables des erreurs d'observations. Parmi les trois autres se trouvent les deux nébuleuses d'Andromède, et leurs vitesses sont de l'ordre de 300 km par seconde. Mais la vitesse moyenne de toutes les autres, qui ont des vitesses d'éloignement, est de 675 km par seconde. On trouve six nébuleuses spirales dont les vitesses d'éloignement sont de plus de 1000 km par seconde, et pour l'une, voisine de l'équateur, dans la constellation de la Baleine, le n° 584 du *New General Catalogue* (54), la vitesse d'éloignement est estimée, bien qu'avec quelques réserves, à 1800 km par seconde. Or, la connaissance des vitesses radiales d'un certain nombre d'objets célestes permet la détermination du mouvement du Soleil par rapport à l'ensemble de ces objets, et par conséquent de la distance moyenne de ceux-ci (avec, bien entendu, toutes les réserves qu'impose la définition même de cette distance moyenne, et dans l'hypothèse que les objets célestes considérés constituent une classe naturelle dont la distance moyenne ait une signification qui ne soit pas purement arithmétique). C'est ainsi que la distance moyenne des étoiles de la sixième grandeur, celles qui sont tout juste encore visibles à l'œil nu, est de 284 années de lumière. De même, par rapport à l'ensemble des nébuleuses spirales, le Soleil se déplace avec une vitesse d'environ 650 km par seconde vers une région

peu éloignée du pôle nord, et probablement située dans la constellation de Céphée, tandis que, par rapport aux étoiles les plus proches, le Soleil se déplace avec une vitesse de 20 km par seconde vers la région frontière des constellations d'Hercule et de la Lyre (55). On en déduit le mouvement, par rapport à l'ensemble des nébuleuses spirales, de l'amas local auquel appartient notre Soleil au sein de la Galaxie, à savoir une rotation dans le plan de la Voie lactée autour de la région centrale de la Galaxie, qui serait occupée par les étoiles de moyenne grandeur qui appartiennent à la constellation du Sagittaire ; la période de ce mouvement de révolution serait de trois milliards d'années. — Mais en ce qui concerne la détermination des distances des nébuleuses spirales, la confrontation des résultats déduits des vitesses radiales et de ceux qui se tirent des mouvements propres angulaires montre que l'application de ces méthodes est probablement prématurée, que les données que l'on possède ne sont pas encore en nombre suffisant à ce que le calcul les débarrasse de l'influence sans doute très considérable des erreurs d'observation et décèle la partie systématique de ces erreurs, et que le résultat final d'une distance moyenne de 30 000 années de lumière ne peut être considéré que comme une grossière limite inférieure, bien au delà de laquelle pourra se trouver le nombre définitif (56).

Le noyau d'une nébuleuse spirale ne se présente qu'exceptionnellement à nos yeux sous une forme à peu près circulaire. Sa forme apparente est généralement elliptique, et il est raisonnable d'attribuer cet aspect, par un effet de perspective, à l'obliquité du plan moyen de la nébuleuse sur le plan perpendiculaire à la ligne de visée. Cette obliquité ainsi connue, considérons deux points de la nébuleuse. L'étude du spectre et l'application du principe de Doppler-Fizeau permettent le calcul de la différence des vitesses radiales en ces deux points, et par conséquent, dans l'hypothèse d'une rotation d'ensemble de la nébuleuse autour de son centre, le calcul des vitesses linéaires de ces deux points parallèlement au plan moyen de la nébuleuse. Que maintenant, sur des photographies prises à des instants suffisamment éloignés, on constate les déplacements angu-

laires de ces deux points dont on vient de calculer les déplacements linéaires : on en déduira la distance de la nébuleuse. — Cette méthode a été appliquée par Lundmark aux observations de mouvements propres faites par Van Maanen (57) et par lui-même dans la petite nébuleuse d'Andromède. Mais les résultats sont très différents, suivant qu'ils reposent sur les observations de Van Maanen ou de Lundmark. D'après les premiers, la période de la rotation de la nébuleuse serait de 230 000 années ; elle était un peu plus de dix fois plus grande d'après les seconds résultats. Aussi les distances conclues présentent-elles des incertitudes du même ordre, et ces distances se placent, pour la petite nébuleuse d'Andromède et deux autres, dans des intervalles aussi peu précis que de 10 000 à 160 000 années de lumière (58).

Observation de novae dans les nébuleuses spirales. — Ces divergences sont assez déconcertantes, et l'importante question de la distribution des nébuleuses spirales ne semble pas proche d'être élucidée. Il n'en est cependant pas moins utile de poursuivre l'examen des méthodes par lesquelles on s'efforce de résoudre cette grande énigme, et probablement pourrait-on, sans paradoxe, développer cette idée que l'étude d'une méthode de recherche est précisément le plus intéressante à l'époque où l'application de cette méthode n'a pas encore donné satisfaction.

Les étoiles nouvelles, les novae, apparaissent généralement dans la Voie lactée ; rappelons, parmi les dernières, les plus connues : la nova de Persée, la nova du Cygne, la nova de l'Aigle : les constellations dont elles portent les noms sont bien des constellations galactiques (59). Or, les novae non galactiques n'ont apparu, sauf quelques-unes (60), que dans les nébuleuses spirales, vers le bord de ces objets, et on pourrait en conclure que les circonstances propres à la formation de ces astres se trouvent réalisées dans les régions extrêmes des galaxies, soit de celle à laquelle nous appartenons et dont la région extérieure se projette dans la Voie lactée, soit dans celles que constituent les nébuleuses spirales. La première nova découverte dans une nébuleuse spirale l'a été en 1885, au bord du noyau de la grande nébuleuse d'Andromède. Ce pouvait être, il est vrai, une simple

superposition perspective, mais de nouvelles découvertes dans la même nébuleuse, et dans d'autres, donnaient bientôt à cette explication une probabilité bien moindre encore que celles qu'on a le devoir de considérer comme rigoureusement nulles. Aujourd'hui, pas moins de 46 novae ont été observées dans la grande nébuleuse d'Andromède (61). — C'est à Curtis (62) que l'on doit la première idée de baser sur ces phénomènes une étude nouvelle de la détermination de la distance des nébuleuses spirales. C'était encore bien audacieux : hypothèse que les novae galactiques et nébulaires ont à peu près le même éclat absolu, affirmation que l'éclat apparent, la grandeur de celles-ci, est environ dix fois moindre que la grandeur de celles-là, et conclusion que les nébuleuses spirales ont une distance moyenne cent fois plus grande que celle des novae galactiques, à savoir 100 000 années de lumière pour les régions extérieures de notre galaxie, et l'ordre de dix millions d'années de lumière pour les nébuleuses spirales. Cette étude a été reprise par Lundmark en 1919 (63) avec tout le soin que permettaient les données de cette époque : la distance conclue pour la grande nébuleuse d'Andromède a été de 650 000 années de lumière, à quoi correspond un diamètre de 23 000 années (64). Puisque la méthode, qui est en principe celle de Curtis, compare les novae nébulaires aux novae galactiques, elle repose, en définitive, sur l'estimation de la distance de celles-ci, ou, ce qui s'y ramène immédiatement, sur l'estimation de leur éclat absolu. Parmi les cinq méthodes qu'il utilise pour ce calcul, Lundmark attribue les poids le plus considérables à la mesure directe des parallaxes stellaires et à la méthode qui, admettant une distribution uniforme des novae dans toute la couronne galactique, s'appuie sur l'indéniable concentration de leurs apparitions, à nos yeux, dans la région du Sagittaire, à laquelle appartient la direction dans laquelle nous devons chercher le centre de notre Galaxie. Des résultats, convenablement dosés, de ces diverses méthodes, il faudrait conclure, pour l'éclat absolu des novae galactiques, à l'époque du maximum, à une valeur de —6,9, ce qui placerait les novae, à l'époque de leur maximum d'éclat, parmi les étoiles les plus brillantes de notre Galaxie. — Encore faut-il que les novae nébulaires ne

soient pas très différentes des novae galactiques, aient un éclat absolu du même ordre que celles-ci : c'est que leurs courbes de lumière ont la même allure, que leurs spectres sont semblables, et que les unes sont distribuées dans la nébuleuse de la même manière que les autres le sont dans la Galaxie.— Or la grandeur moyenne apparente des novae de la nébuleuse d'Andromède est 17,03 (abstraction faite de la première nova qui y a été découverte), à leurs maxima observés ; mais ces maxima observés ne doivent pas être les maxima vrais : la grandeur d'une nova, après son apparition, est exprimée par un nombre dont l'accroissement moyen est de 0,052 par jour, et les maxima vrais doivent souvent échapper à l'observation. Eu égard à cette cause d'erreur, on estime devoir remplacer le nombre 17,03 par 16,34. — La distance correspondante de la grande nébuleuse d'Andromède est 1 400 000 années de lumière, à quoi correspond un diamètre de 60 000 années (65).

Observation de Céphéides dans les nébuleuses spirales. — On classait jadis les nébuleuses en nébuleuses proprement dites et en nébuleuses résolubles en étoiles, ou amas stellaires. On pouvait croire que la classe des amas s'enrichirait indéfiniment aux dépens de celle des nébuleuses proprement dites au fur et à mesure que les instruments d'observation deviendraient plus puissants. On sait cependant aujourd'hui par la spectroscopie qu'il n'en est pas ainsi : les nébuleuses proprement dites sont celles dont le spectre est discontinu, formé de raies brillantes, discontinuité qui témoigne que la source est un gaz incandescent (66). Mais le spectre des nébuleuses spirales est constitué de raies distinctes se détachant sur un fond continu, comme si la source lumineuse était en partie gazeuse, en partie liquide ou solide, ou, du moins, en partie dans l'état dans lequel se trouve la matière stellaire (67). C'est ce qui a fait admettre que les nébuleuses spirales seraient des agglomérations d'étoiles et de nébuleuses proprement dites, comme les nébuleuses irrégulières qui sont certainement à l'intérieur de notre système galactique, et dont le type est la grande nébuleuse de la constellation d'Orion. Cependant, à part les novae, dont il vient d'être parlé, et trois

variables découvertes en 1922 dans la petite nébuleuse d'Andromède, des observations d'étoiles individuelles n'avaient jamais été faites dans les nébuleuses spirales (68). Mais E. P. Hubble, à l'observatoire de Mount-Wilson, vient de constater que les régions extérieures des deux nébuleuses spirales d'Andromède se résolvent « en essaims denses d'images qui ne diffèrent en rien de celles des étoiles ordinaires » (69). Le rapprochement de clichés suffisamment nombreux montre que beaucoup de ces étoiles sont des variables, et que nombreuses sont, parmi ces variables, celles que l'allure de leur courbe de lumière et la brièveté de leur période rangent dans la catégorie des céphéides. Douze céphéides ont été étudiées dans la grande nébuleuse, et vingt-deux dans l'autre. Ce sont des astres de la dix-huitième et de la dix-neuvième grandeur, avec une variation d'environ une unité au cours de la période lumineuse. On sait comment la loi de Leavitt-Shapley (70) constitue une relation entre cette période lumineuse d'une céphéide et la grandeur absolue maximum de pareille étoile. Ici la période est de l'ordre d'une trentaine de jours, et la grandeur absolue maximum correspondante serait comprise entre — 20 et — 25, ce qui indiquerait, par comparaison avec la grandeur apparente, une distance de 900 000 à 1 000 000 d'années de lumière pour l'une comme pour l'autre des deux nébuleuses spirales d'Andromède.

Il est évident que cette estimation n'est que toute provisoire, mais la méthode est créée, et on se trouve très probablement à la veille d'avoir des données suffisantes à son application. Il existe encore quelque incertitude sur les valeurs numériques des coefficients de l'équation au moyen de laquelle s'exprime la loi de Leavitt-Shapley, et à cette incertitude peut correspondre une approximation trop grossière quand il s'agit d'objets célestes dont l'éclat absolu est, comme celui des céphéides d'Andromède, extrêmement grand. Il en résulterait, sur la distance des nébuleuses spirales de cette constellation, et d'après les valeurs numériques adoptées pour les coefficients, des valeurs allant de 880 000 à 1 500 000 années de lumière (71).

(1) Sur la création de l'Union astronomique internationale et sa première assemblée générale, à Rome, voir ces R. A. pour 1920 et 1922, R. Q. S., 3e série, t. 30 (1921,2), p. 256, et 4e série, t. 4(1923,2), p. 188. — Les comptes-rendus du congrès de Cambridge viennent d'être publiés : *Transactions of the International Astronomica Union*, vol. II, *Second general assembly held at Cambridge....* July*l* 1925, publié par A. Fowler, secrétaire général. Ce volume sera désigné dans cette chronique par l'abréviation CAMB.

(2) P. Stroobant. ACAD. R. DE BELGIQUE, BULL. CL. DES SCIENCES, 3e série, t. 9. (1926), p. 609.

(3) Cette R. A. pour 1923, R.Q.S., 4e série, t. 6 (1924,2), p. 155. — L'étude de la vitesse de rotation aux diverses latitudes héliographiques a reçu une contribution nouvelle dans le dépouillement des observations de taches faites à Greenwich de 1913 à 1923 ; la formule obtenue pour exprimer le déplacement angulaire par jour est $14°,37 - 2°,60 \sin^2$: Newton, *Sun's rotation-period from long lived spots*, OBS, t. 48 (1925), p. 127.

(4) J. Evershed, *On some measures of the solar rotation at different levels in the chromosphere*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 607.

(5) H. Deslandres, *Progrès réalisés dans l'étude du Soleil à l'observatoire de Meudon*, C.R., t. 181 (1925,2), p. 583. — CAMB., p. 31.— L. d'Azambuja, *Observations de masses mobiles de vapeur absorbante à de grandes hauteurs au-dessus de la surface solaire ; rapprochement avec les protubérances élevées, à évolution rapide*, C.R., t. 180 (1925,1), p. 47.

(6) E. Petitt et S. B. Nicholson, *Radiation measures on the Corona*, PAC., t. 37 (1925), p. 153; *Radiation measurements of the solar Corona January* 24, 1925, APH. J., t. 62 (1925, 2), p. 202. Le passage du premier au second des nombres donnés dans le texte dépend de la valeur attribuée à la constante solaire, nombre de calories dues au Soleil par cm carré (orienté normalement) et par minute à la distance moyenne de la Terre au Soleil. Dans une conférence à la Royal Astronomical Society, C. G. Abbot a exposé l'état actuel du problème de la variation de la soi-disant constante solaire (OBS. t. 48, 1925, p. 376 ; pour les travaux antérieurs, voir R. A. pour 1922 et 1923, R. Q. S., 4e série, t. 4, 1923, p. 193 et t. 6, 1924, p. 163). Des variations de plusieurs pourcents ont été observées, dont la période est de quelques jours, de quelques mois, de quelques années : accroissement avec l'activité solaire qu'exprime le nombre de taches ; diminution quand une tache passe au méridien... Voir aussi J. Yamatoto, *On some relations between the solar constant and the solar activity*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 71.

(7) J. Kunz et J. Stebbins, *A photometric comparison of the solar Coronas of* 1918 *and* 1925, APH. J., t. 62 (1925, 2), p. 114.

(8) OBS., t. 48 (1925), p. 58. — Voir aussi G. Hale, *Nature of the hydrogen vortices surrounding Sun-spots*, PAC., t. 37 (1925), p. 268.

(9) E. A. Milne, *The equilibrium of the calcium chromosphere*, OBS, t. 48 (1925), p. 3. Pour la discussion qui a suivi cette communication, voir, dans le même volume : J. Evershed, *The height of the chromosphere*, p. 45 ; S. A. Mitchell, A. A. Buss, même titre, pp.108 et 110 ; A. A. Buss, *The height of the solar chromosphere*, p. 222.

(10) Une nouvelle variante de la méthode de Gauss pour la détermination des orbites vient d'être proposée par G. Merton en un article très détaillé des M. N. : *A modification of Gauss's method for the determination of orbits*, t. 85 (1924-1925), p. 693. Cette étude comporte nécessairement la critique d'autres méthodes, à quoi a répondu R. T. Crawford : *Note on Merton's method for the determination of orbits*, M. N., t. 86 (1925-1926), p. 148, article suivi (p. 150) d'une réplique du premier auteur. — La deuxième approximation dans la détermination des trajectoires des planètes rétablit les masses d'abord négligées, et consiste dans ce qu'on appelle le calcul des perturbations ; mémoire récent sur ce sujet : M. Brendel, *Neue Methode zur Berechnung der Störungen*, A. N., n° 5366, t. 224 (1925).

(11) H. L. Jones et J. Halm, *Determination of the solar parallax from observations of Mars secured at the Royal Observatory, Cape of Good Hope, near the opposition of* 1924, — I, *Photographic observations*, — II, *Heliometer observations*, M. N., t. 85 (1924-1925), pp. 832 et 845.

(12) G. Struve, *Durchmesserbestimmung der Planeten Venus.* — J. Dick, *Messungen des Venusdurchmessers.* — A. Kuhl, *Ueber den sogenannten konstanten Messungsfehler bei Bestimmung des Venusdurchmessers*, A. N., n° 5348, t. 223 (1925).

(13) On sait que l'explication du déplacement du périhélie de Mercure est l'une des confirmations astronomiques de la Mécanique relativiste : cette R. A. pour 1921, 1922 et 1923, R. Q. S., 4e série, t. 2 (1922,2), p. 184, — t. 4 (1923,2), p. 225, — t.6 (1924, 2), p. 486. Les discussions autour de cette question semblent fort apaisées. On ne trouve, en 1925, que quelques articles dont une note de J. Chazy attirant l'attention sur l'incertitude des nombres donnés par Leverrier et Newcomb pour mesurer le déplacement périhélique : *Sur l'avance du périhélie de Mercure*, C.R., t. 181 (1925,2), p. 1053 ; une nouvelle étude des écarts entre la théorie newtonienne des planètes et l'observation présenterait à l'heure actuelle, conclut

cette note, une importance capitale, et il semble, en raison de l'accroissement de la précision des observations méridiennes, qu'une telle étude pourrait donner des résultats plus concordants et plus précis que les résultats obtenus par Leverrier et Newcomb. — Voir aussi A. Wintner, *Störungstheoretische Bemerkungen zur Einsteinschen Perihel-Formel*, A. N., nº 5374, t. 224 (1925).

(14) R. T. Innes, *Variability of the Earth's rotation*, A. N., nº 5382, t. 225 (1925). Au congrès de Cambridge, la commission de l'Astronomie dynamique a voté la mise à l'étude des questions suivantes : L'un des problèmes les plus urgents n'est-il pas de déterminer si la rotation de la Terre est uniforme ? Le moyen le plus efficace d'entreprendre cette étude ne se trouve-t-il pas dans la coordination dans le temps des mouvements de la Lune et du premier satellite de Jupiter ? (CAMB., pp. 21 et 236).

A propos de la rotation de la Terre, signalons une note de B. Wanach sur le déplacement du pôle en 1923 (*Die Polbewegung im Jahre* 1923, A. N., nº 5345, t. 223 ; sur l'état actuel de la question, voir cette R. A. pour 1924, R. Q. S., 4e série, t. 8. p. 203). Au congrès de Cambridge, la commission de la variation des latitudes de l'U.A.I. a demandé aux États-Unis que les travaux soient repris aussitôt que possible à l'observatoire de Gaithersburg (CAMB., pp. 56 et 234).

(15) P. Van de Kamp, *Photographic determination of the diameter of Mars*, PAC., t. 37 (1925), p. 261.

(16) H. Ritter, *Marsbeobachtungen während der Opposition* 1924 *August bis November*, et *Vorläufige Mitteilung über die Marsbeobachtungen im Jahre* 1924, A. N., nº 5341, t. 223 (1925). — G. H. Hamilton, *Mars, a comparison of drawings*, avec discussion de R. Trumpler et W. A. Pickering, PAC., t. 37 (1925), pp. 7, 10, 12. — G. H. Hamilton, *Colligation of the martian markings*, P. A., t. 33 (1925), p. 499.

(17) W. H. Pickering, *Reportson Mars* 30 and 31, P. A., t. 33 (1925), pp. 432 et 576. Voir aussi B. Lyot, *Variations de la polarisation de Mars au cours d'une perturbation atmosphérique*, C. R., t. 180 (1925, 1), p. 1645 ; et une communication de T. Philips à la Royal Astronomical Society, OBS., t. 38 (1925), p. 9.

(18) W. W. Coblentz, *Climatic conditions on Mars*, P. A., t. 33 (1925), pp. 310 et 363 ; *Temperature estimates of the planet Mars*, A. N., nº 5374, t. 224 (1925). — M. Macpherson, *Recent observations of Mars*, OBS., t. 48 (1925), p. 344. — D. H. Menzel, *The atmosphere of Mars*, APH. J., t. 63 (1926, 1), p. 48.

(19) W. S. Adams et C. St. John, *An attempt to detect water-vapor and oxygen lines in the spectrum of Mars with the registering microphotometer*, PAC., t. 37 (1925), p. 158.

(20) Le problème de la distribution des étoiles peut se comprendre de deux manières : distribution des étoiles en perspective, dans les différentes régions de la sphère céleste, et répartition des étoiles dans l'espace par rapport à des axes qu'il faudra commencer par définir. La première manière n'est évidemment que provisoire et n'a pas d'autre rôle que de préparer la voie à la solution des questions que provoque la deuxième manière, mais elle n'en est pas moins importante : c'est, dès l'origine, la concentration des étoiles dans la Voie lactée qui a donné l'idée de la forme très aplatie de notre univers stellaire. Un travail très considérable a été publié dans cet ordre d'idées en 1925 : F. H. Seares, P. J. Van Rhyn, M.C. Joyner et M. L. Richmond, *Mean distribution of stars according to apparent magnitude and galactic latitude*, APH. J., t. 62 (1925, 2), p. 320. Le nombre des étoiles jusqu'à la vingtième grandeur visuelle est estimé à un milliard ; leur étude porte principalement sur les valeurs numériques que prend sur la sphère étoilée le nombre N, par degré carré, d'étoiles plus brillantes qu'une grandeur déterminée *m*. Ce nombre N est maximum dans la Voie lactée, sur l'équateur galactique, pour toutes les valeurs de *m*. Pour chaque valeur de *m*, il est considéré comme ne dépendant que de la latitude galactique. Par exemple, d'après le *Mount-Wilson Catalogue*, le nombre des étoiles plus brillantes que la 13e grandeur et par degré carré passe de 190 à 20 de l'équateur au pôle galactique, et pour la 18e grandeur les nombres correspondants sont 10 000 et 600. — Le problème corrélatif pour les nébuleuses, leur distribution perspective sur la sphère stellaire, a été traité par F. H. Seares : *Note on the distribution and number of nebulae*, APH. J., t. 62 (1925,2), p. 168.

(21) Voici quelques travaux récents sur les distances stellaires. On sait qu'il existe dans les spectres des lignes dont l'intensité dépend de l'éclat intrinsèque, grandeur absolue, de la source lumineuse ; ainsi l'étude du spectre d'une étoile fournit sa grandeur absolue, d'où sa distance par comparaison avec la grandeur apparente (R. A. 1921, R. Q. S., 4e série, t. 2, 1922, p. 178). C'est la méthode spectroscopique récemment appliquée à 1105 étoiles par R. K. Young et E. Harper (PUBLIC. DOMINION ASTROPHYSICAL OBS., Victoria, t. 3, n° 1 ; voir OBS., t 48, 1925, p. 227). Sur les applications récentes de la méthode spectroscopique, voir une conférence de Lindblad résumée dans OBS., t. 48 (1925), p. 276. — Une extension de cette méthode a été proposée par R. E. Wilson : *A method of determining luminosities and parallaxes of early type stars*, AN. J., t. 36 (1925), n° 847, p. 50. Voir aussi G. Shajn, *Tests of spectroscopic parallaxes and absolute magnitudes by double stars*, APH. J., t. 62 (1925,2), p. 104. — Un catalogue de distances stellaires, *General Catalogue of parallaxes*, est en cours de publication par les soins de F. Schlesinger, au Yale University Observatory ; voir B.A.A., t. 35 (1924-1925), pp. 82 et 137. Ce catalogue renferme les distances de 1870 objets, parmi lesquels 25 étoiles appartenant au groupe des

Pléiades : il en résulte, pour cet amas, une distance de 325 années de lumière ; d'après le même catalogue, la distance des Hyades ne serait que de 135 années de lumière.— P. Van de Kamp a publié un article, annonçant un travail plus étendu, sur les distances des étoiles faibles ; il y considère ces distances comme ne dépendant que de la grandeur visuelle et de la latitude galactique : *Preliminary results for mean secular and annual parallax of stars of magnitude* 10 *to* 14, PAC., t. 37 (1925), p. 280. — AN. J. a continué la publication de divers résultats relatifs aux distances stellaires : A. Van Maanen, *Stellar parallaxes derived from photographs*, t. 36 (1924), nº 846, p. 46 ; H. L. Alden, *The parallax of δ Trianguli*, ibid., p. 47, et *Trigonometric parallaxes of thirty stars*, nº 851, t. 36 (1925), p. 82. Voir aussi, même recueil, O. J. Lee, *On the interpretation of trigonometric parallaxes derived in the mass*, nº 848, t. 36 (1925), p. 60. — D. L. Edwards, *Spectroscopic parallaxes of* 100 *B-type stars*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 366.

(22) Les méthodes sont nombreuses et la question comporte une abondante bibliographie. L'ouvrage classique est R. G. Aitken, *The binary stars* (New-York, 1918). Article récent : *Ueber eine Vereinfachung der Formeln der Bahnverbesserung visueller Doppelsterne*, A.N., nº 5348, t. 224 (1925); il s'agit du passage de la première à la deuxième approximation, la première étant généralement obtenue par un procédé graphique.

(23) Travaux récents : R. F. Sandford, *The orbits of four spectroscopic binaries*, APH. J., t. 61 (1925,1), p. 320 ; O. Struve et N. T. Bobrovnikoff, *Orbit of the spectroscopic binary* 16 *Lacertae*, ib., t. 62 (1925, 2), p. 139. — Dans le nº 355 du L. O B., 1924, J. H. Moore a publié un *Third catalogue of spectroscopic binaries* ; le *second catalogue* était dû à Campbell et a paru en 1910 : dans l'intervalle le nombre des binaires spectroscopiques connues a passé de 306 à 1054, et le nombre des orbites bien déterminées s'est élevé de 71 à 248.

(24) Cette méthode est la plus sûre pour la détermination des distances. Le nouveau *Catalogue* de Schlesinger signale six systèmes dont la distance, obtenue par cette voie, doit être considérée comme particulièrement bien connue. Ce sont : α Cocher (Capella), par o",066 ou 49 années de lumière ; α Gémeaux (Castor), o",075 ou 43 a. l. ; ε Hydre, o",020 ou 162 a. l. ; α Centaure, o",759 ou 4,3 a. l. ; δ Petit Cheval, o", 064 ou 51 a. l. ; κ Pégase, o", 025 ou 130 a. l.

(25) A. S. Eddington, *On the relation between the masses and luminosities of the stars*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 308. — Ces quinze résultats sont répartis en deux catégories suivant la confiance qu'on peut leur attribuer. La première catégorie, celle des déterminations

très bonnes, ne renferme que (le Soleil) Capella, Sirius, α Centaure et un système pour lequel la répartition des masses entre les deux composantes a exigé une hypothèse particulière. Les systèmes de la deuxième catégorie sont ε Hydre, β Cocher, Procyon ou α Petit Chien, δ Petit Cheval, η Cassiopée, ζ Hercule, 70 Ophiuchus, μ Hercule, o_2 Éridan. — Dans *The binary Stars* (New-York, 1918), R. G. Aitken signale d'autres méthodes que la méthode spectroscopique pour la détermination du rapport des masses des deux composantes : p. 214, par des observations différentielles non plus d'une étoile par rapport à l'autre, mais de chaque composante par rapport à une troisième étoile (voir aussi H. C. Plummer, *An introductory treatise on dynamical Astronomy*, Cambridge, 1918, p. 113, et une discussion de R. G. Aitken dans L. O. B., n° 208 : *An observing list for the determination of the relative masses in visual binary systems*, 1912 ; de même H. N. Russell, *Mass-ratios in the systems of Krüger* 60 *and Castor*, APH. J., t. 32, 1910, p. 36) ; p. 215, une méthode de Van Biesbroeck d'après laquelle le rapport des masses se tirerait de mesures sur des clichés pris au moyen d'un télescope à long foyer.

Parmi les résultats présentés par Aitken comme les meilleurs, se trouve ξ Grande Ourse que n'a pas utilisé Eddington, avec des masses 0,4 et 0,4 fois celle du Soleil (rapprochement des tableaux IX et XI, pp. 209 et 216). — Le n° 385 (1924) du L. O. B. renferme un *Third catalogue of spectroscopic binary stars* avec sept systèmes dont les composantes ont des masses connues séparément, parmi lesquels β Lyre, de masses 13,76 et 16, 81 fois la masse du Soleil. — Voir, en connexion, pour les observations qui restent nécessaires à l'étude visuelle d'un système dont l'étude spectroscopique a déjà été faite, H. L. Alden, *Apparent orbit of* μ *Persei*, AN. J., t. 36 (1925), n° 11.

(26) Une belle étude de variables de ce type a paru dans B.A.A. : E. E. Markwick, *Nine Algol type variables*, t. 35 (1924-1925), p. 52 ; il s'agit de U Céphée, β Persée (Algol), RW Taureau, U Ophiuchus, Z Hercule, RT, RS et Z Petit Renard, Y Cygne.

(27) Dans M. N., t. 85 (1924-1925), p. 245, *On the mass ratio in double stars*, G. Schajn cherche une relation entre le rapport des masses d'un système binaire et la différence des grandeurs apparentes des deux composantes. Le rapport des masses est calculé par la relation obtenue dans le cas d'une vingtaine de systèmes dont le rapport des masses est connu par d'autres méthodes. La confrontation est assez satisfaisante.

(28) Les variables à courte période se distinguent parfois en céphéides proprement dites et en géminides, dont le type est ζ Gémeaux. La courbe de lumière des premières est nettement dissymétrique de part et d'autre du maximum : montée brusque et descente

lente ; au contraire il y a symétrie dans la courbe de lumière des géminides. Les variables dont il est parlé dans le texte sont les céphéides proprement dites.

(29) L'hypothèse des céphéides systèmes binaires est généralement abandonnée par les astronomes anglais et américains. D'autres astronomes continuent néanmoins à soutenir cette explication. Voir, parmi les travaux récents, J. Hellerich, *Untersuchungen zum δ Cephei-Problem*, A. N., t. 224 (1925), n° 5369, et J. G. Hagen, *Bemerkungen zum δ Cephei-Problem*. Ibid., t. 225 (1925), n° 5386.

(30) Les céphéides ont fait l'objet d'une étude très importante dans les PUBL. DOM. OBSERVATORY OTTAWA, t. 9. Astrophysics, n° 1 : F. Henroteau, *The Cepheid problem* (1925). Cette étude comporte celle d'étoiles variables qui ne sont généralement pas considérées comme des céphéides, et on y aperçoit l'intérêt qu'il y aurait à les traiter comme telles ou à les en rapprocher. Dans ses conclusions, l'auteur ne doute pas que l'hypothèse des céphéides étoiles doubles doive être définitivement abandonnée ; cependant l'hypothèse de la pulsation ne lui paraît pas suffisante à l'explication de tous les faits observés. La lecture de ce travail, qui n'est encore qu'une accumulation de documents, donne l'impression de la publication prochaine d'une théorie dans laquelle l'auteur, combinant peut-être les deux hypothèses considérées jusqu'ici, pourra rendre compte de toutes les observations.

(31) Cet article n'abordera que les points préparés par l'article précédent. Bien d'autres études devraient être signalées. — Les R. A. des années antérieures ont parlé à plusieurs reprises de la mesure interférentielle des diamètres stellaires : R. Q. S., 3^{me} série, t. 30 (1921, 2), p. 268, et 4^{e} série, t. 2 (1922, 2), p. 180. Ces travaux se sont poursuivis à l'Observatoire de Mount-Wilson Le diamètre de la variable Mira Ceti (o Baleine) a été mesuré : à son maximum d'eclat du début de 1925, l'étoile avait un diamètre de 260 millions de milles, de l'ordre de celui de Betelgeuse, ou de 250 à 300 fois le diamètre du Soleil : F. G. Pease, *Interferometer notes*, PAC., t. 37 (1925), p. 89. — Les étoiles de la classe A, étoiles blanches à hydrogène du type Sirius, ont fait l'objet d'importantes études spectroscopiques : C. Payne et M. Howe, *The Balmer absorption series in stars of class A*, H. C. O., *circ.* 287 (1925) ; Ch'ing-Sung Yü, *On the continuous hydrogen absorption in spectra of class A stars*, L. O. B., n° 375 (1926). — Dans la réunion générale de la Royal Astronomical Society, février 1925, E. A. Milne a exposé les progrès récents de la spectroscopie stellaire : OBS., t. 48 (1925), p. 62 ; il y a fait, en juin, une communication intitulée *Absorption coefficient and the pressure of radiation in the photospheric layers of a star*, ibid., p. 213. L'objet de cette communication peut être rapproché de la discussion qui sera exposée dans l'article qui commence ici.

(32) La détermination des températures stellaires a donné lieu, en 1925, à un important travail de R. A. Sampson : *Effective temperatures of sixty-four stars*, M. N., t, 85 (1924-1925), p. 212. La méthode employée écarte des erreurs propres aux méthodes habituelles. Elle a été discutée par A. Brill dans A. N., n° 5386, t. 225 (1925) : *Die Temperaturskala der Sterne*. Voir aussi : *Preliminary note on the determination of effective stellar temperatures by the « Prism-crossed-by-grating » method*, par W. M. Greaves et C. R. Davidson, M. N., t. 86 (1925-1926), p. 33.

(33) Capella, — 0,34 et 0,02 ; Sirius, 0,67 ; α Centaure, 4,16 et 5,09 ; Soleil, 4,56 ; Procyon, 3,92 ; δ Céphée, — 2,30 ; β Lyre, — 3,98.

(34) On verra plus loin que cette loi qui lierait la grandeur absolue à la masse exige peut-être une correction qui y ferait intervenir la température, mais elle n'en a pas moins une valeur pratique considérable qui s'est manifestée déjà par son application à la détermination des masses et des distances des systèmes binaires visuels : P. Doig, *Hypothetical dynamical parallaxes*, Obs., t. 48 (1925), p. 112. La théorie des étoiles doubles montre qu'il existe une relation entre la période du système, sa distance, la somme des masses de ses deux composantes et le grand axe de l'orbite décrite par l'une de celles-ci autour de l'autre. La première et la dernière de ces grandeurs sont connues par l'observation du système et l'étude de l'orbite apparente, et la relation en question comporte encore deux inconnues. Mais la loi d'Eddington appliquée aux deux composantes permet d'écrire une relation entre la masse d'une composante, sa grandeur apparente et la distance du système, et la relation correspondante relative à l'autre composante. Ceci nous met en présence de trois équations à trois inconnues, qui sont les masses et la distance. L'application de cette méthode à des systèmes déjà connus a permis des confrontations satisfaisantes. Pour l'application aux Hyades et à quelques systèmes particuliers, voir B. A. A., t. 35 (1924-1925), p. 285 et suiv. — Pour l'application de la loi d'Eddington à la détermination de la masse et de la distance des nébuleuses, voir une communication de Jeans à la Royal Astronomical Society, Obs., t. 48 (1925), p. 3.

(35) C'est ce qui permet à Eddington d'expliquer l'énorme densité de quelques étoiles appellées les naines blanches. Tel est le compagnon peu lumineux de Sirius. Au spectre de cette étoile correspond une température de 8000°, d'où, eu égard à sa grandeur absolue, 11,3, déduite de sa distance, un rayon de seulement 19600 km, beaucoup moindre que celui d'Uranus ; mais la masse est connue : 85 °/₀ de celle du Soleil ; ce qui fait une densité de 53 kg par cm^3. Les mêmes circonstances se présentent pour la composante brillante du système o_2 Éridan. Quant au compagnon de Procyon (α Petit Chien), on croit pouvoir le ranger dans la même catégorie, mais son éclat est trop faible pour que son spectre puisse être étudié et sa tempéra-

ture reste inconnue, d'où cette réflexion d'Eddington : « I suppose it is only mythological association which suggests the idea that it may be another white dwarf ». — A propos de la densité énorme du compagnon de Sirius, et du faible rayon de cette étoile, on n'a pas manqué de saisir l'occasion de vérifier sur son spectre l'effet spectroscopique Einstein. Cet effet que prévoit la théorie de la relativité consiste en ce que la longueur d'onde d'une radiation dépend de l'intensité du champ gravifique au point où se trouve la source lumineuse. Il en a été parlé à plusieurs reprises dans cette R. A., en particulier dans R. A. 1923, R. Q. S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 499. Cette modification de la longueur d'onde se traduit dans le spectre par un déplacement des raies vers le rouge, et la masse et les dimensions du compagnon de Sirius font prévoir un déplacement quarante fois plus grand pour le compagnon de Sirius que pour le Soleil. Les lecteurs de la R. Q. S. savent que l'étude du spectre du compagnon de Sirius a confirmé les prévisions de la Physique relativiste : G. Lemaître, *La théorie de la Relativité et l'expérience*, 4e série, t. 9 (1926,1), p. 370. — Voir aussi W. S. Adams, *The relativity displacement of the spectral lines in the companion of Sirius*, Obs., t. 48 (1925), p. 337, résultats annoncés dans Pac., t. 37 (1925), p. 158 : *A Study of the gravitational displacement....*

(36) R. Q. S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 179.

(37) J. H. Jeans, *On the masses, luminosities and surface-temperatures of the stars*, M. N., t. 85 (1924-1925), pp. 196, 394, 792. Voir aussi dans A. N. une discussion de la théorie d'Eddington : G. Schajn, *On the masses of the stars*, nº 5394, t. 225 (1925).

(38) A. S. Eddington, *On the mass-luminosity relation, a reply to Dr Jeans*, M. N., t. 85 (1925-1926), p. 403, *A limiting case in the theory of radiative equilibrium*, ibid., p. 408. — J. H. Jeans a présenté sa théorie en une séance de la R. Astronomical Society (9 janvier 1925) dont le compte-rendu se trouve dans Obs., t. 48 (1925), p. 29 ; on y verra l'essentiel de la théorie en langage ordinaire, et l'intéressante discusion qui a suivi son exposé, principalement entre Eddington et le conférencier ; voir aussi même vol., p. 206.

(39) On sait qu'il existe une relation entre la période d'une céphéide et sa magnitude absolue : cette loi a été découverte par miss Leavitt et précisée par H. Shapley : Leavitt, 1777 *variables in the Magellanic Clouds*, H. C. O., *Annales*, t. 60 (1908), p. 106 ; H. Shapley, *Studies based on the colors and magnitudes in stellar clusters, On the determination of the distances of globular clusters*, Aph. J., t. 48 (1918, 2), p. 9 (voir p. 103), *Three notes on cepheid variations*, Ibid. p. 154. Les périodes et les grandeurs absolues s'y correspondent de la manière suivante : 0,5 jour (ou moins) et une magnitude — 0,3 ; 1,6 et — 1,0 ; 4,6 et — 2,0 ; 9,0 et — 3,0 ;

17,5 et — 4,0 ; 33,0 et — 5,0. C'est l'application de cette loi qui permet actuellement le calcul de la distance des amas et des nébuleuses dans lesquels on découvre des céphéides, comme on l'a fait récemment, en particulier, pour la grande et la petite nuée de Magellan : cette R. A. 1924, R. Q. S., 4e série, t. 8 (1925, 2), p. 227. — S'il existe une loi entre la masse, la magnitude absolue et la température d'une étoile, la magnitude absolue et la période peuvent être considérées, dans une céphéide, comme deux variables indépendantes dont dépendent et la masse, et la température ; c'est ce qui a été étudié par G. Lemaître : *Note on the theory of pulsating stars*, H. C. O., *circ.* 282 (1925). — A propos des théories de Jeans et d'Eddington, voir aussi H. N. Russell, *Note on the relations between the mass, temperature and luminosity of a gaseous star*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 935.

(40) En particulier : *A theory of stellar evolution*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 914. Voir aussi NATURE, t. 114 (1924), n° 2875, p. 828 et t. 115 (1925), n° 2887, p. 297, *The ages and masses of the stars*, t. 115 (1925), n° 2892, p. 494, *The source of stellar energy*, ainsi que M. N., t. 85 (1924-1925), p. 2, *Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass*. — Il ne faut pas manquer de verser au dossier l'article de NATURE dans lequel, en réponse aux articles de Jeans, H. N. Russell cherche quel est le minimum de modifications qu'il faut apporter à l'ancienne hypothèse de Lockyer pour l'adapter aux découvertes récentes, et particulièrement aux résultats obtenus par Eddington : *The problem of stellar evolution*, n° 2910, t. 116 (1925), p. 209. — Jeans répond aux arguments de Russell de la manière suivante : « La différence entre nos deux conceptions peut être ramenée à la différence des idées que nous nous faisons sur la nature de la matière stellaire. Mon hypothèse considère la matière stellaire comme analogue à une substance radioactive telle que l'uranium, où la vitesse de transformation de la matière en énergie est pratiquement indépendante de la température et de la densité. Au contraire, dans l'hypothèse de Russell, la vitesse de transformation dépend beaucoup de la température. Pour chaque substance, il admet une température critique à laquelle il y a destruction de la plus grande partie de cette substance, avec libération correspondante d'une grande quantité d'énergie. Plutôt qu'à l'uranium, c'est à la poudre à canon que devrait être comparée la matière stellaire suivant Russell... Mais le calcul montre que des étoiles construites sur ce modèle seraient violemment instables... »

(41) Ceci suppose que la matière est une forme particulière de l'énergie. La perte de matière due à un rayonnement serait alors exprimée par une fraction dont le dénominateur serait le carré de la vitesse de la lumière et d'après laquelle la diminution de masse du Soleil serait de 4 000 000 de tonnes par seconde. Voir H. Vogt, *Die Massenabnahme der Sterne infolge Strahlung*, ZEITSCHRIFT FÜR

PHYSIK, t. 26 (1924), p. 139; article de vulgarisation du même auteur : *Die Massenabnahme der Sterne infolge Ausstrahlung von Energie*, SCIENTIA, t. 38 (1927, 2), p. 1, trad. franç., p. 1 du suppl.

(42) Il faut avouer que la perte suffisante de la masse n'est peut-être pas d'une explication aussi commode, et il y a danger d'abuser de l'immensité des durées que nous trouvons à notre disposition dans les problèmes cosmogoniques. A ce sujet : J. H. Jeans, *Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass*, M.N., t. 85 (1925), p. 2 ; H. Vogt, *Die säkulare Massenabnahme der Sterne*, A. N., n° 5394, t. 225 (1925) ; W. M. Smart, *The cosmogonic timescale and binary stars*, M. N., t. 85 (1925), p. 423.

(43) A. S. Eddington, *On the relation between the masses and luminosities of the stars*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 308 ; dans cet article déjà cité voir *Stellar evolution*, p. 325.

(44) J. H. Jeans, *On cepheid and long period variation and the formation of binary stars by fission*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 797.

(45) P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses particules, Paris, 1921. — J. H. Jeans, *Problems of Cosmogony and stellar Dynamics*, Cambridge, 1919 (compte rendu dans R. Q. S. sous le titre *Une cosmogonie mathématique*, 3e série, t. 29, 1921, p. 429). — Application astronomique récente : J. Boccardi, *Ce que nous dit la mécanique céleste à propos de la rotation des planètes intérieures*, C. R., t. 180 (1925, 1), p. 1647.

(46) En fonction de la masse M et du produit $\mu = \omega I$ de la vitesse angulaire par le moment d'inertie, la densité ρ, rapport de la masse au volume, à partir de laquelle il y a un ellipsoïde d'équilibre à trois axes inégaux, est donnée par l'expression

$$\rho = \frac{0{,}000007832358}{\pi} f^3 \frac{M^{10}}{\mu^6}$$

dans laquelle f est le coefficient d'attraction de Newton, coefficient de proportionnalité de la formule qui exprime que deux corps s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. Si on adopte comme unité de masse la masse du Soleil, comme unité de longueur le demi-grand axe de l'orbite terrestre, et comme unité de temps le jour solaire moyen,

$$f = 0{,}0002959122083$$

et la densité limite

$$\rho = 6{,}459982.10^{-17} \frac{M^{10}}{\mu^6}$$

L'aplatissement du dernier ellipsoïde stable de révolution est 0,417763.

(47) Les rapports deux à deux des axes de l'ellipsoïde de bifurcation, à partir duquel peut naître une première figure d'équilibre non ellipsoïdale, ont été calculés par G. H. Darwin et par Liapounoff. Pour celui-ci des nombres proportionnels à ces axes et tels que leur produit soit l'unité sont 0,6507, 0,8150, 1,8856.

(48) La stabilité de la figure piriforme a été pendant longtemps débattue entre les mathématiciens. Poincaré avait cru pouvoir affirmer la stabilité de cette figure, mais il y avait dans son raisonnement une erreur de principe, après la découverte de laquelle la question se montrait beaucoup plus ardue, et, l'erreur rectifiée, Poincaré n'a plus fait qu'indiquer la marche à suivre pour obtenir une réponse définitive. Les calculs sont faits par G. H. Darwin, qui, confiant dans l'allure des séries dont il calculait les premiers termes, conclut à la stabilité. Liapounoff tient compte de termes négligés par Darwin et ceci suffit à faire apparaître la figure comme instable. Les calculs sont repris par Darwin à qui de nouveaux termes ramènent la stabilité. Ces résultats décourageants font décidément croire à une erreur de principe. C'est ce dont Jeans s'est aperçu. Les choses se passaient à peu près comme si deux calculateurs, travaillant séparément, avaient voulu décider du sens de la courbure d'une ligne en un point où, précisément, et sans qu'ils le sachent, cette ligne aurait avec sa tangente un contact du troisième ordre, présenterait un méplat. L'exploration de la ligne au voisinage du point proposé aurait pu faire conclure l'un des calculateurs dans un sens, l'autre dans l'autre sens, suivant le degré d'avancement des calculs, et aussi erronément pour l'un que pour l'autre, la valeur exacte du nombre cherché n'étant autre que zéro, et le problème devant être repris, eu égard à la particularité du point proposé, en y conservant cette fois les quantités infiniment petites de degré supérieur. C'est ce qu'a fait Jeans, *mutatis mutandis* (et moyennant toutes les réserves qu'impose la comparaison), et sa conclusion est définitive : la figure piriforme est instable.

(49) Complément théorique récent : J. H. Jeans, *The radiation from a pulsating star and from a star in process of fission*, M. N., t. 86 (1926), p. 86.

(50) Discussion récente : W. Campbell, *Do we live in a spiral nebula ?* Pac., t. 38 (1926), p. 75. Voir aussi, dans le même recueil, au t. 37, pp. 53, 115, 177, le texte de conférences faites en 1924 par C. Charlier à l'Université de Californie : *On the structure of the universe*. Bien qu'extrêmement sévère envers Kant et ses idées cosmogoniques, l'auteur reconnaît au philosophe allemand la priorité de l'hypothèse d'après laquelle les nébuleuses (spirales) seraient des groupements stellaires comparables à notre Galaxie ; mais la conception de cette

Galaxie pour l'explication de la Voie lactée est due à Thomas Wright ; c'est aussi celui-ci qui a été le premier à considérer l'anneau de Saturne comme formé d'un grand nombre de petits corps solides indépendants. — Quant à la constitution de notre Galaxie, et à la distribution des étoiles qui la constituent, on a les recherches récentes de E. A. Kreiken : *The density function in the Milky Way*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 499, dont on peut rapprocher, du même auteur, *On the distribution of the different spectral types along the Milky Way*, ibid., p. 985.

(51) K. Lundmark, *The motions and the distances of spiral nebulae*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 865.

(52) V. M. Slipher, *The radial velocity of the Andromeda nebula, the spectrum and velocity of the nebula N. G. C.* 1068,... LOWELL OBSERVATORY, *Bulletin* n° 58 (t. II, n° 8), n° 80 (t. III, n° 5).

(53) A. S. Eddington, *The mathematical theory of Relativity*, Cambridge, 1923, p. 162.

(54) Abréviation habituelle : N. G. C. — *A new general Catalogue of nebulae and clusters of stars, being the Catalogue of the late Sir J. F. W. Herschel, revised, corrected and enlarged, by* J. L. S. Dreyer, MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY, t. 49.

(55) K. Lundmark, *The determination of the curvature of space-time in de Sitter's world*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 747 ; *Determination of the apices and the mean parallaxe of spirals*, OBS., t. 47 (1924), p. 279. — On trouvera une synthèse et un essai de systématisation des travaux récents sur le mouvement du Soleil par rapport à l'ensemble des étoiles dans une étude de F. K. Neverman : *Die Bewegung der Sonne im Weltraum abgeleitet aus Sternen mit vollständigen Bestimmungstücken*, A. N., n° 5329, t. 223 (1925). Quant à la connaissance du mouvement du Soleil par rapport à ces classes naturelles d'objets célestes dont il est parlé dans le texte : P. van de Kamp, *A determination of the Sun's velocity with respect to stars of magnitude 6 to 10*, L. O. B., n° 374 (1926) ; H. L. Alden et P. van de Kamp, *The solar motion derived from the proper motions of tenth magnitude stars*, AN. J., t. 36, n° 843 (1925), W. H. Greaves, *The solar motion derived from radial and transverse velocities of stars of spectral types F to M*, M. N., t. 86 (1925-1926), p. 40 ; G. Shajn, *A simple formula for the determination of the convergent point of moving clusters or the solar apex*, A. N., n° 5341, t. 223 (1925). Dans C. R., t. 180 (1925, I), p. 648, *Sur le mouvement du Soleil*, Comas Solà exprime l'opinion que la question du mouvement rectiligne et uniforme du Soleil est dépourvue de sens. Il y a évidemment une difficulté, et il faut se mettre d'accord sur les axes de repère adoptés dans la définition de ce mouvement ; mais il est facile de voir quels sont, dans chaque étude parti-

culière, les axes de repère adoptés tacitement ; il n'en reste pas moins à définir ces axes et à effectuer le passage des uns aux autres, pour rendre les résultats comparables.—Les difficultés signalées par Comas Solà sont évidemment liées aux mouvements relatifs des étoiles. Dans cet ordre d'idées : J. M. Vinter Hansen, *The proper-motions of 302 stars mainly of the B and M types*, A. N., n° 5349, t. 223 (1925) ; W. J. Luyten, *Notes on stellar velocity*, H. C. O., *circ.* 274 (1925), travail dont la première partie (*Absolutely bright stars in the vicinity of the Sun*) doit être rapprochée de P. Bourgeois, *Recherches sur le mouvement d'étoiles voisines du Soleil*, MÉM. ACAD. R. DE BELGIQUE, *Classe des Sciences*, coll. in-4°, t. 7 (1926).

(56) Les études récentes de Lundmark sur les nébuleuses spirales ont été provoquées par un article de L. Silberstein, *The curvature of de Sitter's space-time derived from globular clusters*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 363, auquel a fait suite, après la critique de Lundmark, *The determination of the curvature radius of space-time*, ibid., t. 85 (1924-1925), p. 285. — Dans l'univers relativiste de de Sitter, le temps nécessaire au passage d'une onde lumineuse de l'un à l'autre de deux points ne serait pas à proprement parler proportionnel à la distance de ces deux points. Il en résulterait que la vitesse radiale de la source et l'intensité du champ gravifique à laquelle elle appartient ne seraient pas seules responsables du déplacement des raies spectrales : il y aurait, de plus, un déplacement vers le rouge d'autant plus considérable que la distance de l'objet céleste serait plus proche d'atteindre le « rayon de courbure de l'univers ». Pour les principes, voir A. S. Eddington, *The mathematical theory of Relativity* (Cambridge, 1923), p. 163. Lundmark n'admet pas les conclusions de Silberstein. Voir aussi G. Lemaître, *Note on de Sitter's universe*, JOURNAL OF MATHEMATICS AND PHYSICS, t. 4 (1925), n° 3, ou PUBLIC. DU LABOR. D'ASTRON. ET DE GÉOD. DE L'UNIV. DE LOUVAIN, t. 2 (1926), n° 17, p. 37.

(57) A. van Maanen a poursuivi ses recherches si intéressantes sur le mouvement de rotation qu'il a découvert dans certains amas et nébuleuses. En 1925, il a publié le résultat de ses travaux sur le grand amas de la constellation d'Hercule : *Investigations on proper motions ; 11th paper : the proper motion of Messier 13 and its internal motion*, APH. J., t. 41 (1925, 1), p. 130. Des photographies ont été comparées, deux à deux, prises à des intervalles de 11 et de 9 ans. Les déplacements obtenus sont moindres que l'approximation propre aux observations, et peuvent être considérés comme nuls. Non seulement ceci est bien conforme à la distance de 36000 années de lumière attribuée par Shapley à cet amas, mais démontre aussi la réalité des mouvements observés dans d'autres objets, mouvements dont il n'est pas possible, désormais, d'attribuer l'apparence aux méthodes ou instruments d'observation.—D'autre part, K. Lundmark a repris les études de A. van Maanen sur la nébuleuse spirale M 33,

ou N. G. C. 598, de la constellation des Poissons : *Internal motions of Messier* 33, APH. J., t. 43 (1926, 1), p. 67. La concordance des résultats ne peut être considérée comme assez satisfaisante qu'eu égard aux difficultés des opérations : en attribuant à la nébuleuse, avec Hubble, une distance de 975 000 années de lumière, la masse totale de la nébuleuse serait de 160 trillions de fois la masse du Soleil d'après les résultats de van Maanen, et de 1100 milliards de fois cette masse d'après les résultats de Lundmark.

(58) Il est difficile de parcourir les travaux récents relatifs aux nébuleuses sans s'arrêter un instant aux nébuleuses obscures. — Tout le monde connaît les régions vides d'étoiles distribuées çà et là dans les parties les plus riches de la Voie lactée, et on cite souvent, dans l'hémisphère sud, le « sac à charbon », entre la Croix du Sud et le Centaure. Il est difficilement croyable que ce soient vraiment des espaces dépourvus d'étoiles, des sortes d'avenues percées à travers la profondeur de l'univers stellaire, et qui convergeraient précisément vers la partie de cet univers que nous occupons. Certaines photographies, avec des taches noires aux bords très nets, donnent parfaitement l'impression de nuages obscurs, en particulier la « tête de chien » qui se détache sur le fond clair de la nébuleuse d'Orion, au sud de ζ *Orionis* (t. 13, 1918, des PUBLICATIONS OF THE LICK OBSERVATORY, fig. 5 du mémoire de H. D. Curtis, *A study of occulting matter in the spiral nebulae* ; PAC., t. 37, 1925, p. 20, pl. v du mémoire de R. G. Aitken, *The constellation Orion*). D'autre part, depuis 1904, on connaît les raies du calcium dites stationnaires des spectres d'étoiles de plus en plus nombreuses, et dont le déplacement à la Doppler-Fizeau est nul ou très faible, et en tous cas sans relation avec le déplacement des autres raies ; elles sont dues à la matière cosmique obscure, principalement formée de calcium, qui subit une ionisation partielle au voisinage des étoiles ; importante étude récente : O. Struve, *On the calcium clouds*, P. A., t. 33 (1925), p. 639, et t. 34 (1926), p. 1. — Voir aussi H. Vogt, *Ueber den K-Effekt und die ruhenden Kalziumlinien*, A. N., n° 5367, t. 224 (1925). Dans le tomé 10 (1922) des mémoires du SPECOLA ASTRONOMICA VATICANA, le P. Hagen a commencé la publication d'un catalogue de ces objets, et cette publication a donné naissance à quelques études d'interprétation : F. Becker, *Das Problem der dunklen kosmischen Wolken, Kosmische Wolken in der Umgebung von V et UW Draconis, Fehlerquellen bei Beobachtung der kosmischen Wolken*, A.N., nos 5347 (t. 223), 5359, 5366 (t. 224, 1925) ; J. G. Hagen, *Die Dunkelwolke beim Amerikanebel*, A.N., n° 5376 (t. 224). Les distances des nuées obscures d'Ophiuchus et du Scorpion sont estimées à 325-650 années de lumière par Pannekoek, à 650-975 années par Shapley. (Bibl. dans B. A. A., t. 35, p. 168). — Les PUBL. DE L'OBS. DE L'UNIV. DE TARTU (Dorpat) (t. 26, n° 2, 1924) renferment un mémoire de Miss Luck d'après lequel régnerait tout autour du ciel, au voisinage du parallèle de + 24°, sur deux degrés de largeur, une bande de nuages obscurs,

au point que, si cette bande absorbante n'existait pas, la zone galactique comprise entre les latitudes — 19° et + 19° laisserait voir des étoiles (jusqu'à la grandeur 14,5) cinq fois plus nombreuses, et environ deux fois plus nombreuses aux latitudes plus élevées. On aperçoit l'importance énorme qu'aurait ceci sur la portée des observations telles qu'elles ont été faites et interprétées jusqu'ici. H. Shapley a discuté ces conclusions : *Note on the obscuring cosmic clouds in high galactic latitudes*, H. C. O., *circ.* 281 (1925). Pour lui, les absorptions de lumière décelées à Tartu sont plus apparentes que réelles ; il n'écarte pas la possibilité de nuages obscurs aux hautes latitudes galactiques, mais pense que la question doit être reprise.

(59) L'article de K. Lundmark (M. N., t. 85) renferme une carte de la sphère céleste, en coordonnées galactiques et projection sinusoïdale, sur laquelle sont marquées les positions de toutes les novae observées en dehors des nébuleuses spirales. La concentration dans le voisinage du plan galactique est indéniable. Je compte 53 novae, de la première à la douzième grandeur, parmi lesquelles six seulement se trouvent en dehors de la zone allant de la latitude galactique — 20° à la latitude galactique + 20°. A ce sujet, deux remarques semblent pouvoir être faites : certaines novae extra-galactiques peuvent fort bien appartenir à des nébuleuses spirales invisibles ; les apparitions de novae de faible éclat doivent généralement passer inaperçues dans la Voie lactée, sans qu'il puisse en être ainsi en dehors de cette région stellaire. — La même carte montre une indiscutable accumulation de novae dans le partie de la Voie lactée à laquelle appartient la constellation du Sagittaire. C'est que le Soleil se trouve nettement en dehors de la région centrale de la Galaxie, que, par rapport au Soleil, la direction de cette région centrale est celle de la constellation du Sagittaire, et que les novae se distribuent d'une manière sensiblement uniforme vers le bord de la Galaxie.

(60) L'étoile nouvelle de 1925, la *Nova Pictoris*, tout en n'appartenant pas à la Voie lactée, n'est éloignée de l'équateur galactique que d'un petit nombre de degrés; elle se trouve dans la petite constellation australe dite le Chevalet du peintre qui ne comporte guère que quatre étoiles visibles à l'œil nu : α et β de la troisième grandeur, γ de la quatrième, et δ de la cinquième. Cette dernière est très voisine de l'étoile de première grandeur Canopus ou α de la constellation de la Poupe. Le Chevalet du peintre sépare ainsi la Poupe de la Dorade à laquelle appartient principalement la grande nuée de Magellan. Les coordonnées équatoriales approchées de la nova Pictoris sont une ascension droite de 6^h35^m et une déclinaison de — 62°35′. Elle a été aperçue le 25 mai, avant le lever du Soleil, par un habitant d'une localité voisine du Cap, un employé des postes qui se rendait à son travail. Prévenu télégraphiquement par l'auteur de la découverte, le personnel de l'observatoire du Cap faisait le soir même les premières observations photométriques, spectrales

et de position (H. J. Jones, *Nova Pictoris* 1925, Obs., t. 48, 1925, p. 261). Plus brillante que α Pictoris, sa grandeur était 2,4 ; la région à laquelle elle appartient avait été explorée quelques jours auparavant, et son accroissement d'éclat a dû être très rapide ; elle peut être identifiée avec une étoile de la treizième grandeur connue depuis 1889 (Obs., même vol., p. 316) ; le plus grand éclat a été atteint le 9 juin, avec une grandeur 1,1 ; dès le lendemain celle-ci était ramenée à 1,7, et au début de juillet l'étoile n'était plus que de la troisième grandeur ; depuis cette date, elle s'est comportée comme une variable, revenant, par exemple le 11 août, à des maxima voisins de la deuxième grandeur. Le jour de sa découverte, son spectre était du type de α Cygne, qui est celui des étoiles à hydrogène, et témoignait d'un éloignement de 84 km par seconde ; vers la mi-juin, la vitesse indiquée était, dans le même sens, de 1190 km par seconde ; puis les raies d'absorption se sont dédoublées, comme pour une binaire spectroscopique dont les composantes auraient eu des vitesses d'éloignement de 322 et de 630 km par seconde. — Dans A.N., nº 5413, t. 226 (1925), J. Hartmann reprend l'étude du spectre et en déduit, par une méthode assez aléatoire, le diamètre de l'étoile, à savoir 141 millions de km le 27 mai et 298 millions le 9 juin, ainsi que la distance, 4500 années de lumière.

(61) Lorsque Lundmark écrivait son article, on ne connaissait que 22 novae dans la nébuleuse d'Andromède, les 24 autres venaient d'être découvertes par Hubble qui n'avait pas encore publié ses observations.

(62) H. D. Curtis, *Three novae in spiral nebulae*, L. O. B., nº 300, (1917). Voir aussi Journal of Washington Ac. of Sciences, t. 9 (1919), nº 8.

(63) K. Lundmark, *Die Stellung der Kugelförmigen Sternhaufen und Spiralnebel zu unserem Sternsystem*, A. N., t. 209 (1919).

(64) Cette étude a été reprise par un grand nombre d'astronomes, et les résultats ont concordé d'une manière satisfaisante. La bibliographie de ces travaux se trouve dans l'article de Lundmark (M. N., t. 85) dont le texte ci-dessus est principalement l'analyse.

(65) On va voir pourquoi, dans le calcul ci-dessus, la première nova, S Andromède, découverte dans la grande nébuleuse de cette constellation, a été laissée de côté. C'est qu'à l'époque de son maximum, cet astre a dû avoir une grandeur absolue incomparablement plus grande que les autres novae considérées et que son introduction aurait faussé les résultats. En effet, d'après la distance calculée comme il a été dit ci-dessus, la nova S Andromède a dû avoir, à son maximum, l'extraordinaire grandeur absolue — 16, ce qui en ferait un astre 1675.10^5 fois plus brillant que le Soleil. La connaissance

d'exemples analogues serait bien nécessaire à ce que pareille conclusion puisse être acceptée. Or il se peut que pareil précédent se trouve dans la célèbre nova Cassiopée, apparue en 1572 et observée par Tycho Brahé, et dont la grandeur semble bien avoir été de l'ordre de — 5, comparable à celle de Vénus. Cassiopée est une région peu riche en étoiles, et la seule qui puisse correspondre actuellement aux observations de Tycho Brahé est telle petite étoile de la quatorzième grandeur. Du type spectral auquel elle appartient, et de sa perte de grandeur apparente, on déduit quelle a dû être sa grandeur absolue au maximum d'éclat, et on trouve, comme pour S Andromède, une grandeur absolue voisine de — 16. Il y a lieu de s'occuper aussi des autres nébuleuses où se sont montrées des étoiles nouvelles. En particulier, une nova a été observée dans la nébuleuse globulaire (N. G. C. 4486 ou Messier 87) de la constellation de la Vierge, avec une grandeur maximum de 11,5. En attendant que cette étude soit faite, voici une estimation que l'on pourra trouver hasardée mais dont l'approximation semble bien être de l'ordre de celle dont on doit actuellement se contenter dans ce genre de recherches. Cette petite nébuleuse renferme un grand nombre d'étoiles de la vingtième grandeur, et qui sont les étoiles les plus brillantes de cette formation. Si on admet —7 pour la grandeur absolue des étoiles les plus brillantes que l'on rencontre ordinairement dans un système galactique, on obtient, pour cette nébuleuse globulaire, une distance de 8 000 000 d'années de lumière.

(66) Je voudrais saisir cette allusion pour signaler rapidement les progrès récents de l'Astronomie dans l'étude des amas stellaires. — Cette R. A. a analysé longuement, l'an dernier, les premiers travaux de H. Shapley sur les nuées de Magellan : R. Q. S., 4e série, t. 8 (1925, 2), p. 228. Cette étude a été poursuivie en 1925 : H. Shapley, H. Wilson, J. Yamamoto et M. Walton, *The Magellanic Clouds*, H. C. O., *circulaires* 275, 276, 280, 288 (V, *The absolute magnitudes and linear diameters of* 108 *diffuse nebulae* ; VI, *Positions and descriptions of* 170 *nebulae in the small Cloud* ; VII, *The photographic period-luminosity curve* ; VIII, *Note on the spectral composition of the foreground*). Les grandeurs absolues des nébuleuses de la grande nuée sont au moins — 6, et la plus brillante, 30 Dorade, a une magnitude — 14 ; c'est la plus brillante nébuleuse gazeuse connue (R. Q. S., *loc. cit.*, p. 232). Les nébuleuses de la petite nuée n'ont pas un éclat aussi considérable : leurs grandeurs absolues vont cependant encore de — 3 à — 6,5. L'étude des céphéides de la petite nuée a permis à H. Shapley de modifier sa loi période-grandeur absolue, qui n'était établie que pour les grandeurs visuelles, de manière à la rendre valable pour les grandeurs photographiques : la forme nouvelle de la loi est acquise aujourd'hui pour les périodes allant d'un à quarante jours : pour les périodes allant d'un à seize jours, la magnitude absolue décroît de 0,31 à 0,36 lorsque le logarithme de la période augmente de 0,2, la magnitude correspondant à un jour étant — 0,51.

Enfin une nouvelle étude des étoiles les plus brillantes distribuées dans les deux nuées a montré que la petite nuée ne renferme pas d'étoiles dont l'éclat absolu soit supérieur à — 7,5, tandis que la grande nuée semble bien renfermer trente ou quarante étoiles dont l'éclat est au moins suffisant à définir une grandeur absolue — 8,5. Même si ces objets étaient, plutôt que des étoiles individuelles, des groupes d'une quarantaine d'étoiles, chacune de celles-ci serait encore plus brillante que les étoiles les plus brillantes de notre Galaxie. Article de vulgarisation : H. Shapley, *The Magellanic clouds and their bearing on the problem of stellar ages*, SCIENTIA, t. 38 (1925, 2), p. 69, trad. fr., p. 29 du suppl. — E. Hubble a découvert onze céphéides dans un petit amas stellaire (N. G. C., 6822) de la constellation du Sagittaire, vers les confins de l'Aigle et du Capricorne. Les périodes de ces céphéides vont de 12 à 64 jours, à quoi correspond, eu égard à leurs grandeurs apparentes, une distance de 700 000 années de lumière. L'amas renferme cinq nébuleuses diffuses dont le diamètre moyen est de 130 années de lumière. Les étoiles les plus brillantes de l'amas ont une grandeur absolue voisine de — 6 (*A remote stellar system*, APH. J., t. 62, 1925, 2, p. 409). — O. Heckmann a étudié l'amas dit de Praesepe qui se trouve dans la constellation du Cancer, a peu près dans l'écliptique, dans le quadrilatère formé par les étoiles γ, δ, η, θ, dont les deux premières sont de la quatrième grandeur, les deux autres de la cinquième : *Photographische Vermessung der Praesepe*, A. N., n° 5380, t. 225 (1925). —Voir aussi deux notes de C. Parvulesco, *Sur la distribution des étoiles dans les amas globulaires M 9, M 10, M 12 et la théorie cinétique des gaz, sur les conditions d'équilibre d'un nuage stellaire isolé et dépourvu de rotation*, C. R., t. 181 (1925, 2), pp. 500, 849. — Le L. O. B. a publié une étude de l'amas N. G. C. 6705 (M 11) par R. Trumpler (*The cluster Messier 11*, n° 361, 1925). Cet amas fait partie de la Voie lactée, dans la constellation de l'Écu de Sobieski, près de λ Aigle. Il s'est montré constitué d'environ 500 étoiles au moins aussi brillantes que le Soleil et d'un grand nombre d'étoiles moins brillantes ; sa distance est de 4 000 années de lumière, son diamètre de 18 années ; la densité stellaire y est au moins 7 000 fois plus grande qu'au voisinage du Soleil.

(67) Les solides et liquides incandescents donnent un spectre continu. Mais il y a aussi spectre continu lorsque la source est gazeuse dans des conditions (de densité, de pression) telles qu'elle constitue une masse opaque : J. H. Jeans, *The origin of the continuous spectra*, OBS., t. 48 (1925), p. 44. — A propos des nébuleuses proprement dites, parmi lesquelles les nébuleuses globulaires (ou planétaires), voir B. P. Gerasimovic, *On the radiative and mechanical equilibrium of spherical planetary nebulae*, A. N., n° 5382, t. 225 (1925).

(68) Il faut remarquer avec Lundmark (article M. N., t. 85) que les quelques novae apparues récemment, par exemple dans la grande nébuleuse d'Andromède, suffisent à affirmer que les nébu-

leuses spirales renferment des étoiles en nombre extrêmement considérable, et de l'ordre de plusieurs millions. En effet, les observations récentes correspondent à au moins une dizaine d'apparitions par année. Ce raisonnement ne suppose pas que les novae sont vraiment des étoiles nouvelles, et il se peut fort bien que les phénomènes que nous désignons ainsi soient des explosions auxquelles puisse être assujettie une même étoile à des intervalles plus ou moins réguliers. Mais d'après ce que nous savons des novae de notre Galaxie, ces intervalles ne peuvent guère être moindres que plusieurs siècles, et la conclusion ci-dessus, sur le nombre des étoiles des nébuleuses spirales, reste valable.

(69) E. P. Hubble, *Cepheids in spiral nebulae*, P. A., t. 33 (1925), p. 252, et Obs., t. 48 (1925), p. 139.

(70) Voir ci-dessus, la note 39.

(71) K. Lundmark, *The motions and the distances of spiral nebulae*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 865. — Ce mémoire de Lundmark discute encore trois méthodes indirectes de calcul des distances des nébuleuses spirales, dont il n'a pas été parlé dans le texte. L'une de ces méthodes, celle de Jeans, se base sur le calcul théorique, d'après une hypothèse sur la constitution de la nébuleuse, de la distance qui doit moyennement séparer les noyaux observés dans les nébuleuses spirales. Une autre méthode, due à Oepik, s'appuie sur l'observation des vitesses de rotation au sein de la nébuleuse ; elle est bien aléatoire ; son application à la grande nébuleuse d'Andromède donne une distance de 1 500 000 années de lumière, mais son application à la nébuleuse 4594 du N. G. C. donne une distance de 56 000 000 d'années de lumière, un diamètre de 110 000, et une masse qui vaudrait trente milliards de fois celle du Soleil.

Le problème des trois corps

par M. R. Van Ingelgem (1)

La détermination des mouvements des corps célestes a de tout temps préoccupé les astronomes. Leurs observations remontent aux temps les plus reculés. Toutefois, c'est seulement au XVIII[e] siècle que, grâce à la connaissance de la loi d'attraction universelle énoncée par Newton, grâce aussi aux progrès de l'analyse mathématique, les astronomes purent aborder directement le problème de la détermination des trajectoires des astres. Les mathématiques appliquées s'enrichirent ainsi d'une branche nouvelle, la Mécanique céleste, dont l'Astronomie a tiré si grand profit.

Imaginons n corps P_1, P_2, P_3, ..., P_n, de masses connues, qui s'attirent conformément à la loi de Newton, et proposons-nous de déterminer la nature du mouvement de chacun d'eux : *c'est le problème des n corps.* Sa résolution comporte les hypothèses suivantes:

1. — les corps du système sont soustraits à l'influence de toute autre force;

2. — par orbite d'un astre on entend la trajectoire de son centre de gravité; l'analyse mathématique ne tiendra aucun compte de la forme des corps ni de leurs dimensions; elle ne retient que leur masse qu'elle imagine condensée au centre de gravité, centre qui devient ainsi le point d'application de la résultante de toutes les actions s'exerçant sur le corps.

La mécanique démontre que cette dernière hypothèse est d'autant plus proche d'être vraie que la forme des corps est

(1) Ciel et Terre, t. XLII (1926) p. 128.

plus voisine de la forme sphérique et que leurs distances sont plus grandes vis-à-vis de leurs dimensions. Dans le système planétaire il en est pratiquement ainsi, quelle que doive être l'approximation.

En rapportant la position des points à un système d'axes rectangulaires, il est facile d'écrire entre les $3n$ coordonnées des corps étudiés et la variable t qui représente le temps un système de $3n$ équations différentielles du second ordre. Après intégration, ce système permettrait d'exprimer, en fonction de t, les coordonnées des n points et, par suite, de déterminer les trajectoires; mais cette intégration n'est pas possible par les moyens dont dispose actuellement l'analyse mathématique.

Lorsqu'on réduit le nombre de points à trois, on a le célèbre *problème des trois corps* qui occupe une place si importante dans la Mécanique céleste, et à la solution duquel les plus grands mathématiciens ont consacré leurs efforts. L'objet de ces pages est de présenter un court aperçu de ces recherches et plus particulièrement des plus récentes. J'ai écarté systématiquement toutes les notations algébriques, toutes les démonstrations de détail, qui, logiquement, devraient illustrer cet exposé, mais qui n'auraient aucune chance d'intéresser les personnes peu familiarisées avec les complications du calcul différentiel et intégral.

Le problème des trois corps est déjà ramené, par les hypothèses admises ci-dessus, au problème du mouvement de trois points matériels P_1, P_2, P_3, doués de masse, s'attirant proportionnellement à celles-ci et en raison inverse du carré de leurs distances. Ce problème comporte donc, ainsi qu'on vient de le remarquer, l'intégration d'un système de neuf équations différentielles du second ordre. Toutefois, plutôt qu'à un système quelconque d'axes de coordonnées, on rapporte souvent le mouvement du point P_2 à des axes se rencontrant en P_1 et celui de P_3 à un système d'axes parallèle au premier et se rencontrant au centre de gravité de l'ensemble des points P_1 et P_2. Le problème se réduit alors à l'intégration de six équations différentielles du second ordre où figurent six fonctions inconnues, à savoir les coordonnées

des points P_2 et P_3, et la variable indépendante t représentant le temps.

Si ce système pouvait être intégré, il permettrait d'exprimer les coordonnées des points matériels P_2 et P_3 en fonction du temps t et de dessiner la trajectoire que décrit P_2 relativement à P_1 et celle de P_3 relativement aux deux premiers points. C'est à ce système d'équations que nous nous référerons dans la suite de cet article; mais il y a lieu de remarquer que le problème n'a pas été restreint et que, moyennant quelques modifications de langage, la solution à laquelle nous aboutirons peut tout aussi bien se tirer du système primitif.

Les six équations différentielles du second ordre peuvent équivalemment s'écrire sous la forme d'un système de douze équations différentielles du premier ordre, si l'on introduit comme inconnues nouvelles les dérivées premières des coordonnées par rapport à t; ces dérivées premières sont les composantes de la vitesse des deux mobiles P_2 et P_3 suivant les directions des axes. La question est donc ramenée à la recherche de douze intégrales premières du système, c'est-à-dire, douze relations entre les inconnues et le temps. Mais la découverte de ces intégrales, si elles existent, aura introduit douze constantes d'intégration dont il faudra fixer la valeur, et ici apparaît la nécessité de conditions supplémentaires pour la résolution du problème. On comprend d'ailleurs que celui-ci, tel qu'il a été posé plus haut, reste indéterminé. Pour le déterminer il suffirait, par exemple, de connaître, à un moment donné t_0, les positions des points et leurs vitesses. Nous supposerons connus ces éléments et les désignerons sous le nom de *conditions initiales;* t_0 pourra être considéré comme instant initial. Ces données permettront de fixer la valeur de chacune des constantes des intégrales et il restera à résoudre celles-ci par rapport aux inconnues.

L'intégration des systèmes d'équations différentielles présente généralement des difficultés très grandes. Du problème des trois corps on a pu découvrir facilement quatre intégrales; les trois *intégrales des aires* et celle de la *force vive.* En existe-t-il d'autres? Toutes les recherches faites en vue de les découvrir sont restées infructueuses. Lagrange a mon-

tré que le système peut, en définitive, se ramener à la découverte de sept intégrales premières et à une intégration. Jacobi arrive à une réduction analogue; il lui reste à intégrer un système de cinq équations différentielles du premier ordre, une autre du second ordre et à effectuer une quadrature.

L'insuccès de ces efforts devait naturellement faire soupçonner l'inexistence de nouvelles intégrales. Bruns, le premier, établit, en 1887, cette inexistence. Il démontra, en effet, que toute intégrale indépendante du temps, algébrique par rapport aux coordonnées et aux vitesses, peut être déduite des intégrales connues. P. Painlevé étendit encore la portée du théorème de Bruns, et H. Poincaré lui donna, dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (1892), une forme très générale, s'étendant même aux intégrales transcendantes uniformes et les inconnues variant dans un domaine restreint. Aussi Poincaré n'hésite-t-il pas à conclure: « Si une solution complète du problème est possible, elle exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués. »

Le problème des trois corps présente un intérêt si grand pour l'Astronomie qu'à défaut de solution rigoureuse, des savants ont eu recours, de bonne heure, à une intégration approchée. Dès le XVIII[e] siècle, de grands géomètres, parmi lesquels il faut citer Clairaut, d'Alembert, Euler, s'illustrèrent par ces recherches et dotèrent la science de données infiniment précieuses sur le mouvement de la Lune et des autres corps de notre système planétaire. Un exposé, même succinct, de ces travaux et des méthodes adoptées ne peut trouver place ici; qu'il suffise de signaler que les diverses approximations conduisent, pour les coordonnées des points mobiles, à des séries où figurent des termes croissant indéfiniment avec le temps et dont l'influence devient prépondérante au bout d'une durée suffisamment grande. Aussi les séries obtenues par les premiers géomètres ne représentent-elles le mouvement que pendant une période assez restreinte. Les astronomes modernes se sont efforcés d'éviter cet inconvénient en recourant à des méthodes d'approximation dont les résultats s'expriment par des développements purement trigonométriques. Les unes conduisent à des séries où le temps

t n'intervient que comme argument de fonctions trigonométriques sinus et cosinus; les autres à des intégrales se présentant sous la forme d'une suite des puissances croissantes d'un paramètre petit et dont les coefficients sont, eux aussi, des suites infinies ayant pour termes des sinus ou cosinus où le temps ne figure que dans l'argument. Ces séries ne sont pas convergentes pour toutes les valeurs de t et ne constituent pas, au point de vue théorique, une solution du problème. Néanmoins, tels quels, les résultats obtenus par les méthodes d'approximation ont largement suffi aux besoins de l'Astronomie, et on peut même prévoir qu'une solution rigoureuse ne lui fournirait aucune donnée nouvelle. C'est donc bien moins l'espoir d'enrichir cette science que le désir de résoudre un beau problème d'analyse qui attire les mathématiciens vers le problème des trois corps.

L'impossibilité de découvrir des intégrales nouvelles et les progrès de l'analyse orientèrent les efforts vers une conception nouvelle de la solution vainement poursuivie jusque-là. Dans cet ordre d'idées les travaux de Painlevé, Levi-Civita et Bisconcini sont remarquables, mais c'est à un savant finlandais, Sundman, que revient l'honneur d'avoir, le premier, résolu le problème. Je vais essayer de faire connaître sa méthode d'après un mémoire inséré dans les *Acta mathematica* de 1913.

Presque tous les problèmes de dynamique auxquels on applique les équations de Lagrange, c'est-à-dire une forme spéciale des équations différentielles du mouvement, présentent cette particularité que, pour certaines valeurs des variables, les équations cessent de représenter le mouvement du système. Dans le problème des trois corps aussi cette particularité se présente; pour certaines valeurs de t les équations, comme les valeurs des inconnues qu'on en tirerait, sont incapables de fournir les éléments des orbites décrites. Painlevé a démontré, et c'est là un théorème de la plus grande importance, que les seules singularités possibles correspondent aux instants où l'une au moins des trois distances mutuelles devient nulle, c'est-à-dire, aux instants où un *choc* se produit. C'est la possibilité de pareils événements qui constitue la principale difficulté dans la recherche d'une solu-

tion. Poincaré, Painlevé, d'autres encore, ont donné des expressions vérifiant rigoureusement les équations du mouvement, mais seulement pour un temps excluant tout choc; celles de Sundman sont générales.

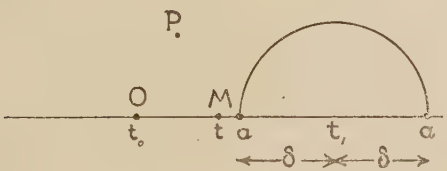
Ici se pose la question: des chocs se produiront-ils? Cela dépend évidemment de la nature des conditions initiales. Mais, celles-ci étant données, le choc peut-il être prédit? Dans ses *Leçons sur la théorie des équations différentielles*, Painlevé fit prévoir que les conditions que doivent vérifier les conditions initiales pour qu'il y ait choc de deux des corps (la rencontre simultanée des trois corps n'est pas envisagée) pourraient bien s'exprimer par deux relations analytiques distinctes se réduisant à une seule dans le cas du mouvement plan. Ces prévisions furent bientôt reconnues exactes par Levi-Civita et par Bisconcini. Ce dernier trouva les deux relations distinctes qui permettent de prévoir si dans le voisinage d'une position du système à un instant donné, deux des corps se choqueront ou non. Mais si l'on voulait transporter dans le domaine de la nature les conclusions auxquelles nous venons de parvenir, il ne faudrait pas perdre de vue ce que nos hypothèses présentent d'irréel. Nous avons, en effet, supposé les masses des corps condensées en leurs centres de gravité respectifs, et les équations du mouvement ne tiennent aucun compte de la forme des corps, ni de leurs dimensions. La loi de Newton ne peut même s'appliquer avec une approximation satisfaisante à des corps (non constitués de couches homogènes parfaitement sphériques) dont les masses sont censées condensées aux centres de gravité, que lorsque les distances mutuelles de ces corps sont très grandes par rapport aux dimensions de ceux-ci. Mais, précisément, ces conditions disparaissent dès qu'on envisage des époques voisines d'un choc. Aussi, pendant cette période d'affolement, les équations ne représentent que très imparfaitement le mouvement du système, et les solutions de ces équations, tout en satisfaisant aux exigences de l'analyse mathématique, n'auraient plus aucune chance de nous renseigner sur la nature de ce mouvement. Elles le représenteront encore bien moins après un choc, car un grand nombre de facteurs tels que l'élasticité, la forme des corps... joueront

leur rôle dans la détermination de la nature et de la forme des orbites décrites après le choc.

Revenons aux équations du mouvement. Nous avons supposé qu'à l'instant t_0 les inconnues prennent des valeurs réelles finies; nous admettons aussi que les conditions initiales sont telles qu'un choc ne peut se produire dans le voisinage de cet instant. Nous référant aux lignes qui précèdent, ainsi qu'à la théorie de Cauchy relative aux équations différentielles, nous pouvons alors développer les inconnues en séries procédant suivant les puissances entières croissantes de $(t-t_0)$. Il est certain, de plus, que ces séries sont convergentes pour toutes les valeurs de $(t-t_0)$ inférieures à une certaine quantité, et qu'elles représentent donc fidèlement le mouvement pendant cet intervalle de temps. Convenons de dire, avec Painlevé, que le mouvement reste *régulier* pendant ce laps de temps. Mais lorsque t augmente à partir de t_0, le mouvement ne reste pas nécessairement régulier; il cesse de l'être dès l'instant, soit t_1, où un choc se produit et alors aussi les intégrales trouvées cessent d'être applicables. On démontre cependant qu'on peut développer les inconnues en de nouvelles séries convergentes dans le voisinage de l'instant t_1 et procédant suivant les puissances positives entières de $\sqrt[3]{t-t_1}$.

Pour faire comprendre ce que Sundman appelle une *continuation du mouvement à l'instant d'un choc*, je recourrai à la notion de variable complexe ou imaginaire.

Dans un plan α traçons arbitrairement une droite sur laquelle nous prenons un point 0 et choisissons un sens positif



et un sens négatif. Convenons que l'origine 0 figure l'instant t_0 à partir duquel le temps a été compté et adoptons une

unité de longueur représentant l'unité de temps. Il est, dès lors, possible de construire, sur l'axe, toutes les valeurs réelles de la variable t. Inversement, à tout point M de l'axe correspond un instant, et l'abscisse de ce point, c'est-à-dire le nombre qui exprime la mesure algébrique du segment 0 M, donne la valeur correspondante de t. L'intervalle de temps écoulé entre deux instants est mesuré par la différence des abscisses des deux points. Ce que nous avons fait jusqu'ici ne diffère en rien de ce qu'on fait dans la préparation du diagramme représentatif d'un phénomène en fonction du temps.

Par analogie, et dans un but de généralisation, on dira qu'un point quelconque P du plan, non situé sur l'axe, figure un instant imaginaire et que la variable t prend, à cet instant, une valeur *complexe* ou *imaginaire*. Le plan α est *le plan de la variable t.*

En admettant les valeurs imaginaires de la variable on peut dire que les séries en $\sqrt[3]{t - t_1}$ dont il vient d'être question, convergent en tous les points intérieurs à un cercle C — le centre excepté — tracé dans le plan de cette variable, dont le centre est le point M_1 de l'axe correspondant à l'instant de choc t_1 et dont le rayon δ peut être calculé. On est donc certain que ces formules représentent exactement le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps appartenant aux intervalles de $(t_1 - \delta)$ à t_1 et de t_1 à $(t_1 + \delta)$ et ne le représentent pas pour $t = t_1$. Pour éviter cette exception, imaginons qu'à partir de l'instant réel $(t_1 - \delta_1)$, compris entre les instants $(t_1 - \delta)$ et t_1, nous donnions des valeurs complexes à t : faisons faire, à cette variable, un détour ABA' contournant le point critique M_1. Comme les fonctions n'ont pas cessé de vérifier les équations différentielles, elles représentent le mouvement pendant tout ce temps et le représenteront encore lorsque, t redevenu réel, on aura $t > t_1$. Il est vrai que tout nombre réel a trois racines cubiques dont une seule est réelle et qu'aux trois valeurs de $\sqrt[3]{t - t_1}$ correspondent trois trajectoires dont une est réelle. Mais en nous limitant au mouvement réel nous considérons

comme se prolongeant l'une l'autre l'orbite réelle antérieure et l'orbite réelle postérieure.

On pourrait montrer que la position de choc correspond, sur ces trajectoires, à un point de rebroussement.

Si aucun choc ne se produit dans la suite, les séries obtenues sont indéfiniment applicables. Mais si un nouveau choc survient, par exemple à l'instant t_2, on pourra écrire, pour cet instant, des développements tout pareils à ceux qu'on vient d'utiliser au premier choc et l'on prolongera, en t_2, le mouvement comme en t_1. Les mêmes opérations s'imposent à chaque choc.

Mais voilà aussi l'inconvénient de la solution ainsi présentée: les développements trouvés pour les inconnues du problème ne restent pas indéfiniment convergents. Sundman introduit une nouvelle variable, ω, liée à la variable t par une relation choisie de telle sorte que t variant de façon continue de $-\infty$ à $+\infty$, ω varie de même de $-\infty$ à $+\infty$ et, de plus, qu'à toute valeur $t = t'$ corresponde une seule valeur ω' pour ω, et réciproquement. Remplaçons alors $t - t'$ en fonction de $\omega - \omega'$ dans l'un ou l'autre groupe des derniers développements, suivant que t' correspond ou non à un instant de choc. Cette substitution nous donne des intégrales jouissant des propriétés suivantes : 1) ces séries convergent pour toutes les valeurs de ω intérieures à un cercle de centre ω' et de rayon connu; 2) cette propriété existe pour toute valeur réelle de ω'.

En somme, si nous nous reportons au plan de la variable ω, c'est ce que les mathématiciens expriment en disant que les développements en $\omega - \omega'$ sont des fonctions holomorphes de ω pour toutes les valeurs de cette variable comprises dans une bande infinie du plan à bords parallèles et dont l'axe des valeurs réelles est l'axe de symétrie.

Sundman opère un dernier changement de variable. On sait, par un théorème de Riemann, qu'il est toujours possible de trouver une fonction analytique $\tau = f(\omega)$, holomorphe dans la partie de plan dont il vient d'être question et telle qu'à chaque point de cette région corresponde un point d'un

cercle du plan de la variable τ et réciproquement. En choisissant convenablement la fonction f, on peut faire en sorte que le cercle ait pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Si on veut bien se rappeler que la variable ω est liée à t par une relation connue, on voit que l'on possède le moyen d'exprimer directement τ en fonction de t, et si, dans les toutes dernières formules trouvées pour les inconnues, on fait disparaître la variable ω au profit de τ, la solution définitive à laquelle parvient Sundman se présente, en somme, comme suit: les équations du mouvement modifiées permettent d'écrire les valeurs des coordonnées des points mobiles et aussi les composantes des vitesses en fonction d'une variable τ,

$$x = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots$$
$$y = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \ldots$$
$$\text{— — — — —}$$
$$\text{— — — — —} \quad ,$$

expressions qui vérifient les équations et sont convergentes pour toutes les valeur de τ comprises entre —1 et +1. De plus, τ est liée au temps par une certaine relation, $t = F(\tau)$, de telle sorte qu'à toute valeur réelle de t corresponde une seule valeur réelle de τ comprise entre —1 et +1, et réciproquement.

L'ensemble de ces relations détermine, à tout instant, la position de chacun des corps. A une valeur quelconque de t, l'équation $t = F(\tau)$ fera toujours correspondre une seule valeur de τ comprise entre les deux limites —1 et +1; c'est cette valeur de τ que l'on portera ensuite dans les autres égalités. En donnant à t un nombre suffisamment grand de valeurs dans un intervalle donné, on pourra construire les trajectoires pour cette période; les chocs y seront décelés par des points de rebroussement.

La solution ne se présente pas avec toute la simplicité qu'on lui eût souhaitée, c'est-à-dire par des formules donnant les inconnues en des suites dont les termes dépendent du temps et dont les coefficients se calculent de proche en proche en fonction des conditions initiales; que, de plus, ces suites restent convergentes et représentent donc le mou-

vement pour toute valeur de t. Telle quelle elle satisfait cependant aux exigences de l'analyse mathématique. Mais rendra-t-elle quelque service à l'Astronomie? J'ai déjà signalé quelles réserves s'imposent quand on veut transporter dans le domaine des applications certains résultats fournis par les équations de la dynamique et pour quelles raisons. Appliquée à l'étude du mouvement des corps célestes la solution perd de la rigueur absolue qu'elle possédait dans le cas idéal, et il n'est pas certain, dès lors, qu'elle donnerait des résultats plus précis que les méthodes d'approximation. L'emportât-elle même sur ces procédés par une précision plus grande, qu'elle ne serait pas, pour cela, à même de se substituer totalement à ceux-ci. Il semble que la généralité même de la solution de Sundman la rend impropre à mettre en relief certaines propriétés caractéristiques du mouvement des astres, propriétés que révèlent si bien les formules de la mécanique classique. Toutefois rien ne prouve, a priori, qu'elle en est totalement incapable et elle s'accommoderait d'ailleurs de tout autre procédé de calcul des coefficients des séries de nature à lui assurer cet avantage.

R. VAN INGELGEM.

Calcul d'une table des factorielles n ! *jusqu'à* n = 1200

par **M. M.** *Alliaume* (1)

La rédaction, par le *Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, d'une table, jusqu'à $n = 1000$, des factorielles $n!$ décomposées en facteurs premiers a été signalée au cours de la session d'avril 1926 aux membres de la première Section de la *Société scientifique*. A cette époque le travail était arrivé à $n = 380$ (Annales, t. 45, 1926, p. 131). Une note adressée au mois de juillet au congrès de Lyon de l'*Association française pour l'avancement des sciences* a annoncé la fin de ce travail. Depuis lors, il a été prolongé jusqu'à $n = 1200$, qui est le nombre auquel il sera arrêté :

$$
\begin{aligned}
1200! = {} & 2^{1196} \cdot 3^{596} \cdot 5^{298} \cdot 7^{198} \cdot 11^{118} \cdot 13^{99} \cdot 17^{74} \cdot 19^{66} \cdot 23^{54} \cdot 29^{42} \cdot 31^{39} \cdot \\
& 37^{32} \cdot 41^{29} \cdot 43^{27} \cdot 47^{25} \cdot 53^{22} \cdot 59^{20} \cdot 61^{19} \cdot 67^{17} \cdot 71^{16} \cdot 73^{16} \cdot 79^{15} \cdot \\
& 83^{14} \cdot 89^{13} \cdot 97^{12} \cdot 101^{11} \cdot 103^{11} \cdot 107^{11} \cdot 109^{11} \cdot 113^{10} \cdot 127^{9} \cdot 131^{9} \cdot 137^{8} \cdot \\
& 139^{8} \cdot 149^{8} \cdot 151^{7} \cdot 157^{7} \cdot 163^{7} \cdot 167^{7} \cdot 173^{6} \cdot 179^{6} \cdot 181^{6} \cdot 191^{6} \cdot 193^{6} \cdot \\
& 197^{6} \cdot 199^{6} \cdot 211^{5} \cdot 223^{5} \cdot 227^{5} \cdot 229^{5} \cdot 233^{5} \cdot 239^{5} \cdot 241^{4} \cdot 251^{4} \cdot 257^{4} \cdot \\
& 263^{4} \cdot 269^{4} \cdot 271^{4} \cdot 277^{4} \cdot 281^{4} \cdot 283^{4} \cdot 293^{4} \cdot 307^{3} \cdot 311^{3} \cdot 313^{3} \cdot 317^{3} \cdot \\
& 331^{3} \cdot 337^{3} \cdot 347^{3} \cdot 349^{3} \cdot 353^{3} \cdot 359^{3} \cdot 367^{3} \cdot 373^{3} \cdot 379^{3} \cdot 383^{3} \cdot 389^{3} \cdot \\
& 397^{3} \cdot 401^{2} \cdot 409^{2} \cdot 419^{2} \cdot 421^{2} \cdot 431^{2} \cdot 433^{2} \cdot 439^{2} \cdot 443^{2} \cdot 449^{2} \cdot 457^{2} \cdot \\
& 461^{2} \cdot 463^{2} \cdot 467^{2} \cdot 479^{2} \cdot 487^{2} \cdot 491^{2} \cdot 499^{2} \cdot 503^{2} \cdot 509^{2} \cdot 521^{2} \cdot 523^{2} \cdot \\
& 541^{2} \cdot 547^{2} \cdot 557^{2} \cdot 563^{2} \cdot 569^{2} \cdot 571^{2} \cdot 577^{2} \cdot 587^{2} \cdot 593^{2} \cdot 599^{2} \cdot 601 \cdot \\
& 607 \cdot 613 \cdot 617 \cdot 619 \cdot 631 \cdot 641 \cdot 643 \cdot 647 \cdot 653 \cdot 659 \cdot 661 \cdot \\
& 673 \cdot 677 \cdot 683 \cdot 691 \cdot 701 \cdot 709 \cdot 719 \cdot 727 \cdot 733 \cdot 739 \cdot 743 \cdot \\
& 751 \cdot 757 \cdot 761 \cdot 769 \cdot 773 \cdot 787 \cdot 797 \cdot 809 \cdot 811 \cdot 821 \cdot 823 \cdot \\
& 827 \cdot 829 \cdot 839 \cdot 853 \cdot 857 \cdot 859 \cdot 863 \cdot 877 \cdot 881 \cdot 883 \cdot 887 \cdot \\
& 907 \cdot 911 \cdot 919 \cdot 929 \cdot 937 \cdot 941 \cdot 947 \cdot 953 \cdot 967 \cdot 971 \cdot 977 \cdot \\
& 983 \cdot 991 \cdot 997 \cdot 1009 \cdot 1013 \cdot 1019 \cdot 1021 \cdot 1031 \cdot 1033 \cdot 1039 \cdot 1049 \cdot \\
& 1051 \cdot 1061 \cdot 1063 \cdot 1069 \cdot 1087 \cdot 1091 \cdot 1093 \cdot 1097 \cdot 1103 \cdot 1109 \cdot 1117 \cdot \\
& 1123 \cdot 1129 \cdot 1151 \cdot 1153 \cdot 1163 \cdot 1171 \cdot 1181 \cdot 1187 \cdot 1193 \cdot
\end{aligned}
$$

---

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 241 de la première partie.

On rappelle que pour rendre ces résultats plus maniables, sans restreindre leur utilité, on a introduit une notion pour laquelle a été proposé le terme de factorielle première. La factorielle première (p) d'un nombre premier p est le produit des nombres premiers qui ne lui sont pas supérieurs. Par cette notion, par exemple,

$$1200! = (2)^{600} \cdot (3)^{288} \cdot (5)^{100} \cdot (7)^{80} \cdot (11)^{19} \cdot (13)^{25} \cdot (17)^{8} \cdot (19)^{12} \cdot (23)^{12} \cdot (29)^{3} \cdot (31)^{7} \cdot (37)^{3} \cdot (41)^{2} \cdot (43)^{2} \cdot (47)^{3} \cdot (53)^{2} \cdot (59) \cdot (61)^{2} \cdot (67) \cdot (73) \cdot (79) \cdot (83) \cdot (89) \cdot (97) \cdot (109) \cdot (113) \cdot (131) \cdot (149) \cdot (167) \cdot (199) \cdot (239) \cdot (293) \cdot (397) \cdot (599) \cdot (1193).$$

La table, jusqu'à $n = 1200$, des factorielles $n!$ décomposées en factorielles premières est aussi terminée.

Supplément à l' " Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés „ [1]

par M. É. Goedseels [2]

---

1. Considérons un système quelconque d'équations linéaires à trois inconnues x, y, z, [3]

$$(1) \qquad a_i x + b_i y + c_i z = m_i + r_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \ldots n,$$

contenant, outre les inconnues proprement dites x, y, z, des erreurs inconnues r_i, soumises à la seule condition d'être contenues dans un intervalle *donné* $(-\mathrm{M}, +\mathrm{M})$.

2. Supposons qu'on applique la méthode des moindres carrés à la résolution de ces équations, et désignons par X_1, Y_1, Z_1 les solutions ainsi obtenues pour x, y, z. Désignons en outre par R_1 l'erreur moyenne minimum, c'est-à-dire la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des valeurs que prennent les erreurs r_i lorsqu'on remplace x, y, z, par X_1, Y_1, Z_1.

Posons

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} (mm), & (am), & (bm), & (cm) \\ (ma), & (aa), & (ba), & (ca) \\ (mb), & (ab), & (bb), & (cb) \\ (mc), & (ac), & (bc), & (cc) \end{vmatrix},$$

$$a = + \textit{ mineur } (mm) : \mathrm{D},$$

$$b = + \textit{ mineur } (cm) : \mathrm{D},$$

$$c = + \textit{ mineur } (ca) : \mathrm{D},$$

$$\mathrm{Q} = + \sqrt{n \cdot (ac - b^2 : a}.$$

---

[1] Voir ces PUBLICATIONS DU LABORATOIRE D'ASTRONOMIE, t. 2 (1925), n° 24, p. 151. Nous remettons à nos auditeurs, à titre d'hommages d'auteur, des exemplaires de notre brochure, et en adressons volontiers aux personnes qui nous en font la demande.

[2] ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. 45 (1926), p. 242 de la première partie.

[3] Nos raisonnements s'appliquent à un nombre quelconque d'inconnues.

On sait et nous démontrons du reste dans notre brochure qu'on a :

$$X_1 = b : a \ , (1)$$
$$R^2_1 = 1 : an.$$

3. Théorème. — *Lorsqu'on introduit un ou plusieurs nouveaux termes dans une série d'équations* (1), *en laissant subsister tous les anciens termes, l'erreur moyenne minimum nouvelle* R_2 *est* $< R_1$, *l'erreur moyenne minimum ancienne.*

En effet, il suffit évidemment de démontrer le théorème pour un seul terme nouveau. Considérons donc de nouvelles équations

$$(2) \qquad a_i x + b_i y + c_i z + d_i u = m_i + r_i,$$

et désignons par X_2, Y_2, Z_2, U_2, R_2 les nouvelles valeurs des inconnues et de l'erreur moyenne minimum.

Puisque R_2 est l'erreur moyenne minimum des équations (2), on obtient une erreur moyenne plus grande en remplaçant les inconnues par des valeurs autres que X_2, Y_2, Z_2, U_2, par exemple en faisant $x = X_1$, $y = Y_1$, $z = Z_1$, $u = 0$.

Or, on obtient ainsi l'erreur moyenne R_1.

On a, par conséquent, $R_1 > R_2$, ou $R_2 < R_1$.

4. Nous avons défini dans notre brochure, sous le nom d'*hyperbole indicatrice*, une courbe qui, rapportée à des axes OUY, jouit des propriétés suivantes :

Les ordonnées de la branche supérieure sont des bornes supérieures de l'inconnue x, et les ordonnées de la branche inférieure en sont des bornes inférieures.

Pour en tirer des indications pratiques, nous avons envisagé les trois cas $R = M$, $R < M$, $R > M$, seuls cas possibles.

5. *Premier cas :* $R = M$. — Dans ce cas l'hyperbole indicatrice a une asymptote parallèle à l'axe OU, et ayant pour ordonnée $(b : a) = X_1$.

Cette ordonnée X_1 est donc la seule quantité comprise entre les bornes supérieures et les bornes inférieures de l'inconnue x, et par suite la valeur rigoureusement exacte de cette inconnue.

Il est facile de montrer que des conclusions analogues s'appliquent à Y_1 et Z_1.

6. *Deuxième cas :* $R < M$. — Nous prouvons dans notre brochure que dans ce deuxième cas l'hyperbole indicatrice a deux ordonnées extrêmes, que le minimum des bornes supérieures vaut

$$b : a + Q \cdot \sqrt{M^2 - R^2},$$

(1) Nous nous occupons seulement de l'inconnue x, mais nos raisonnements s'appliquent textuellement aux autres inconnues.

et que le maximum des bornes inférieures vaut

$$b : a - Q . \sqrt{M^2 - R^2}.$$

La valeur la plus approximative de x est donc le milieu $(b : a) = X_1$, et a pour approximation la demi-différence entre les quantités ci-dessus, c'est-à-dire $Q . \sqrt{M^2 - R^2}$.

Remarque. — On s'imagine généralement qu'une série d'équations est d'autant meilleure que l'erreur moyenne est plus voisine de zéro.

Le résultat ci-dessus montre que cette manière de voir n'est pas exacte. L'application de la méthode des moindres carrés à la détermination d'une ou plusieurs inconnues réussit d'autant mieux que l'expression $Q . \sqrt{M^2 - R^2}$ est plus voisine de 0. Les solutions X_1, Y_1, Z_1 sont le moins bonnes lorsque R est très petit (R étant une somme de carrés ne peut être nul).

Au fur et à mesure que R augmente, les résultats s'améliorent, à tel point, nous l'avons vu dans le premier cas, que si $R = M$, les résultats sont les valeurs exactes des inconnues. Nous verrons ci-après ce qui a lieu dans le cas $R > M$.

7. *Troisième cas :* $R > M$. — Nous montrons que dans ce cas les ordonnées des deux branches varient entre $-\infty$ et $+\infty$.

Il est évidemment impossible que des bornes supérieures de l'inconnue x soient inférieures à des bornes inférieures de la même inconnue.

Par conséquent, les données qui ont conduit à l'inégalité $R > M$ sont évidemment absurdes.

Le parti à prendre dans ces conditions dépend des équations sur lesquelles on a opéré.

Si ces équations sont exactes, il est certain que l'approximation M est erronée, et doit par suite être remplacée par une quantité égale ou supérieure à R.

Si les équations ont été établies en partant de certaines hypothèses scientifiques, et si on n'a aucune raison pour suspecter M, ces hypothèses sont évidemment le contraire de la vérité.

C'est généralement cette dernière éventualité qu'on rencontre dans la pratique.

On ne saurait indiquer comment on doit s'y prendre pour trouver des hypothèses satisfaisantes, conduisant certainement à un des deux cas $R = M$ ou $R < M$. C'est une question pratique, échappant complètement au raisonnement mathématique.

Exemple. — Des astronomes se proposent de déterminer les éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète, savoir les deux coordonnées

polaires héliocentriques de la normale au plan de l'orbite, les deux coordonnées du périhélie, l'excentricité de l'orbite, la vitesse aréolaire de l'astre sur sa trajectoire, et l'instant t_0 du passage de l'astre au périhélie. Ils font une série d'observations avec la plus grande précision possible, étudient consciencieusement toutes les causes d'erreurs, et parviennent à donner une valeur tout à fait certaine de M.

La première hypothèse dont ils partent pour déterminer les équations, consiste à considérer les inconnues comme des constantes.

S'ils aboutissent à une inégalité $R > M$, il est certain que leur hypothèse est absurde, et qu'une nouvelle hypothèse, dans laquelle une ou plusieurs des inconnues varient, s'impose.

Il est facile de montrer que cette nouvelle hypothèse introduit un ou plusieurs termes nouveaux dans les équations, et y laisse subsister tous les anciens termes. Par conséquent, en vertu du théorème démontré plus haut, l'erreur moyenne est diminuée. La diminution est suffisante si on obtient $R = M$, ou $R < M$.

Si on ne parvient pas à éviter l'inégalité $R > M$, on doit renoncer à supposer que l'astre décrit une conique conformément à la loi de Newton.

Sur la réduction des observations méridiennes

par M. F. Moreau (1)

On sait qu'à chaque observation de passage correspond une équation de la forme :

$$\cos\delta \pm (c-\kappa) + i\cos(\varphi \mp \delta) + a\sin(\varphi \mp \delta) = \begin{matrix}(\alpha - t)\cos\delta \text{ passage supérieur}\\ (\alpha - t + 12^h)\cos\delta \text{ pass. infér.}\end{matrix}$$

(formule de *Mayer*) où nous représentons par φ la latitude du lieu d'observation, par α l'ascension droite apparente de l'astre au moment de l'observation et par δ la déclinaison, par c, i et a les corrections instrumentales de la lunette méridienne (collimation de l'axe optique, inclinaison et déviation azimutale de l'axe des tourillons), par κ la valeur de : $0,^s0208\cos\varphi$, $0,^s0208$ étant la constante de l'aberration diurne, par t l'heure marquée par la pendule sidérale au moment du passage de l'astre au fil milieu et par C_p la correction de pendule.

La méthode habituellement suivie pour la réduction des observations de passage consiste à mesurer directement c et i par des procédés physiques et à calculer ensuite les valeurs de a et C_p par la résolution d'équations contenant ces deux inconnues.

On peut se demander s'il est possible de déterminer simultanément les quatre corrections C_p, c, i et a par des observations astronomiques (2). Si l'on observait quatre étoiles fondamentales, on obtiendrait un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues. Mais ce système d'équations ne peut nous fournir les valeurs de C_p, c, i et a car le déterminant formé par les coefficients de ces inconnues est nul (la 1re colonne de ce déterminant est, en effet, égale à la somme de la 3e et de la 4e multipliées respectivement par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$). Cette indétermination pouvait d'ailleurs être prévue, car aucune donnée ne fixe la position du méridien du lieu d'observation. L'indétermination subsiste malgré la connaissance de la collimation ; cette correction instrumentale est, en effet, inhérente

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 45 (1926), p. 246 de la première partie.

(2) Liagre, *Sur les corrections de la lunette méridienne.* Mém. Acad. Royale de Bruxelles, t. 18 (1844). – Goedseels, *Théorie des instruments visuels*, Annales S. S., t. 46 (1926), pp. 690-734.

à l'instrument, indépendante de son orientation. Mais l'indétermination disparaît si l'on connaît i, a ou C_p ; la valeur de i étant mesurée par un procédé physique (niveau à bulle ou bain de mercure nadiral), il sera donc possible de déterminer C_p, c et a par le calcul.

Il est même possible de déterminer simultanément les quatre corrections C_p, c, i et a par l'observation de quatre étoiles fondamentales quand l'une d'elles est observée par réflexion sur un bain de mercure. En effet, le coefficient de i change de signe dans l'équation qui correspond à l'observation par réflexion et le déterminant formé par les coefficients des quatre inconnues n'est plus nul. Pour que la valeur de i soit bien déterminée, il faut que l'étoile observée par réflexion culmine dans le voisinage du zénith ; c'est au zénith, en effet, que l'influence de l'inclinaison est maxima. On ne se bornera pas à l'observation de quatre étoiles et il conviendra d'enregistrer les passages d'une dizaine d'étoiles convenablement réparties sur le méridien, trois ou quatre étoiles zénithales étant observées par réflexion. On traitera l'ensemble des équations par la méthode des moindres carrés. A cause des longs calculs qu'elle exige, cette méthode n'est pas commode, mais il nous paraît intéressant de l'appliquer quelquefois pour s'assurer que le procédé habituellement suivi n'est pas entaché d'erreurs systématiques. Cette méthode de détermination des corrections instrumentales par l'observation d'étoiles pourrait, nous semble-t-il, présenter un intérêt particulier si l'on parvenait à enregistrer avec précision les heures de passage à l'aide des cellules photo-électriques.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'observateur avait en vue la détermination de la correction de pendule, c'est-à-dire la détermination de l'heure ou de la longitude. Les observations faites uniquement en vue de la détermination des ascensions droites pourraient être réduites de la manière suivante. On sait qu'à chaque observation de passage correspond une équation de la forme :

$$(C_p + m)\cos\delta \pm (c - \kappa) \pm n \sin\delta - \begin{cases} (\alpha - t)\cos\delta & \text{passage supérieur} \\ (\alpha - t + 12^h)\cos\delta & \text{passage inférieur} \end{cases}$$

(formule de *Bessel*), $(6^h - m)$ et n étant les coordonnées horaires du point de percée de la direction est-ouest de l'axe des tourillons avec la sphère céleste. Si l'on observait trois étoiles fondamentales, on obtiendrait un système de trois équations linéaires à trois inconnues : $(C_p \quad m)$, c et n. Le déterminant formé par les coefficients de ces inconnues étant différent de 0, il est possible de déduire les valeurs de ces inconnues des observations *directes* de trois étoiles fondamentales. Les déclinaisons des étoiles fondamentales observées seront choisies de telle sorte que la valeur du déterminant soit la plus grande possible. En pratique, on ne se bornera pas à l'observation de trois étoiles et il conviendra d'enregistrer les passages d'une dizaine d'étoiles fondamentales convenablement réparties sur

le méridien. Les quantités ($C_p + m$), c et n étant connues, chaque observation de passage fera connaître α qui demeure la seule inconnue dans la formule de Bessel.

La détermination de l'heure et des ascensions droites peut se faire commodément par la méthode graphique suivante qui nous donne des résultats satisfaisants. Chaque observation de passage au méridien supérieur fournit une équation de la forme :

$$C_p + m + n \operatorname{tg} \delta + (c - \kappa) \sec \delta = \alpha - t$$

où $\qquad m = i \cos \varphi + a \sin \varphi \quad$ et $\quad n = i \sin \varphi - a \cos \varphi.$

Si l'on fait un diagramme en portant les valeurs de tg δ en abscisses et les valeurs $(\alpha - t)$ en ordonnées, on aura autant de points que d'étoiles fondamentales observées et l'on montre facilement que ces points sont distribués suivant une hyperbole. Ces points sont distribués suivant une ligne droite de coefficient angulaire $(i \sin \varphi - a \cos \varphi)$ si la collimation est nulle (ou si son influence est éliminée par le retournement de la lunette) et si les temps t sont corrigés de l'effet de l'aberration diurne.

Quand on a en vue la détermination de l'heure, on déduit du diagramme la valeur $(\alpha - t)_z$ qui correspondrait à une observation zénithale (δ φ) et la correction de pendule se calcule alors par la formule :

$$C_p = (\alpha - t)_z - (i + c) \sec \varphi,$$

la valeur de $(i + c)$ étant déterminée par des procédés physiques.

On observera une dizaine d'étoiles fondamentales qui culminent de part et d'autre du zénith et à moins de 20° du zénith. Cette méthode, on le voit, n'exige pas la détermination de la déviation azimutale, mais on s'assurera, par l'observation des mires, que cette correction instrumentale ne s'est pas modifiée au cours de la séance d'observation.

Quand on a uniquement en vue la détermination des ascensions droites, on déduit du diagramme les valeurs de la fonction $(\alpha - t)$ qui correspondent aux déclinaisons des étoiles d'ascension droite inconnue. En ajoutant t (heure marquée par la pendule sidérale au moment du passage, au fil milieu, de l'étoile d'ascension droite inconnue) à la valeur correspondante de $(\alpha - t)$, on obtient l'ascension droite cherchée. On est ainsi dispensé de la détermination des corrections instrumentales et de la correction de pendule. Il sera avantageux d'observer des étoiles fondamentales aussi voisines que possible des étoiles dont on veut mesurer l'ascension droite.

La réduction des observations en déclinaison peut être faite par un procédé graphique semblable.

On sait qu'à chaque observation en déclinaison correspond une équation de la forme :

$$l - l_0 + R + F = \delta$$

où nous représentons par l la somme de la moyenne des lectures aux index du cercle — moyenne qui sera corrigée de l'erreur de graduation — et de l'« appoint » fourni par le micromètre en déclinaison ; par l_0 la valeur de l qui correspond à l'équateur, par R la correction due à la réfraction, par F la correction due à la flexion horizontale de la lunette et par δ la déclinaison de l'astre observé. R peut être exprimé par une série dont le terme le plus important est C tg z, où C représente une constante et z la distance zénithale méridienne de l'astre observé. F est exprimé par une série dont le terme principal est de la forme C' sin z. L'influence de la flexion est moins sensible que celle de la réfraction. Si l'on fait un diagramme en portant les valeurs de tg z en abscisses et les valeurs $(\delta - l)$ en ordonnées, les points représentatifs des étoiles fondamentales observées se distribuent à peu près suivant une ligne droite. Quand on a en vue la détermination de la latitude, on déduit du diagramme la valeur $(\delta - l)_z$ qui correspondrait à une observation zénithale ($\delta = \varphi$, $z = 0$) et la latitude se calcule alors par la formule

$$\varphi = (\delta - l)_z + l_z,$$

l_z représentant la valeur de l pour le zénith, valeur obtenue à l'aide du bain de mercure nadiral. — Quand on a simplement en vue la détermination des déclinaisons, on déduit du diagramme les valeurs de la fonction $(\delta - l)$ qui correspondent aux distances zénithales des étoiles observées. En ajoutant l à la valeur correspondante de $(\delta - l)$, on obtient la déclinaison cherchée. On est ainsi dispensé du calcul des corrections de réfraction et de flexion. — Nous avons supposé que les conditions météorologiques (température, pression atmosphérique et état hygrométrique de l'air) étaient invariables durant la séance d'observation. S'il n'en était pas ainsi, on devrait, au préalable, corriger toutes les valeurs de l pour qu'elles correspondent aux mêmes conditions météorologiques.

PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE
D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

IV — 1927